BIBLIOTECA NACIONAL
DE CHILE

Sección Chilena

Volúmenes de la obra 2

Ubicación 10 964- 2

BIBLIOTECA NACIONAL
0519676

10(964-2)

Edw. B. Budge
1919
Valparaíso

TEORÍA DE LOS INSTRUMENTOS

SEGUNDA PARTE

lacre

CLASES DE ASTRONOMÍA

Profesadas en la Universidad

DE SANTIAGO DE CHILE

POR EL

DIRECTOR DEL OBSERVATORIO ASTRONÓMICO NACIONAL

DR. FRIEDRICH WILHELM RISTENPART

BIBLIOTECA NACIONAL
SECCION CHILENA
BIBLIOTECA NACIONAL
SECCION CONTROL

SANTIAGO DE CHILE
IMPRENTA CERVANTES
DELICIAS, 1167
—
1912

TERCER AÑO

TEORÍA DE LOS INSTRUMENTOS

SEGUNDA PARTE

(INSTRUMENTO DE PASAJES, CÍRCULO VERTICAL, INSTRUMENTO ACODILLADO)

REDACTADA SEGUN LOS APUNTES TOMADOS POR

ROSAURO CASTRO y RÓMULO GRANDÓN

AYUDANTES DE LA CLASE DE ASTRONOMÍA GENERAL

PREFACIO

El Director del Observatorio Astronómico de Santiago ha quedado obligado por su contrato a dar conferencias sobre astronomia en la Universidad del Estado. Este deber que me ha impuesto el Gobierno lo he interpretado despues de mi llegada en Octubre de 1908 de tal modo que mis conferencias debian versar sobre todo lo que abarca el dominio de la astronomia práctica i teórica, con el fin de poder educar así a mis alumnos para que pudiesen trabajar independientemente mas tarde con los instrumentos de primera clase con que el Gobierno dotaria al nuevo Observatorio en Espejo. Así inicié en 1909 mis conferencias, tratando la trigonometría esférica, el cálculo de interpolacion i la astronomía esférica propiamente dicha e ilustrándolas con numerosos ejemplos de cálculos i problemas prácticos que debia vijilar junto conmigo el ayudante de la clase, don Sanson Radical. Durante el año siguiente de 1910 traté yo lo relacionado con la precesion, nutacion, aberracion, teoria jeneral del anteojo i, en especial, la determinacion de la hora en el meridiano.

El programa del tercer año de 1911, cuyas conferencias se encuentran redactadas en el presente tratado, consistió en profundizarse en la teoria del instrumento de pasos, agregando la determinacion de las declinaciones i ascensio

nes rectas i, por fin, en el trato del instrumento acodado de pasos, ya que recien habia sido instalado un hermoso ejemplar en Espejo, proveniente de la fábrica de Bamberg en Berlin i destinado a colaborar en el trabajo internacional para determinar el movimiento de los polos de la esfera terrestre.

Primeramente no tenia el infrascrito la intencion de imprimir sus conferencias. Poco a poco me convencí, sin embargo, de la necesidad de hacerlo, pues la mayor parte de mis discípulos no estaban en condiciones de poder repetir lo oido en las clases para el exámen final de cada año. Tambien tuve otro motivo para hacerlo, porque una parte de mis conferencias del primer año, a saber, el capítulo «Diferencias e Interpolaciones» habia sido publicado en los Anales de la Universidad, tomo 127, pájinas 835-878, sin autorizacion mia i sin nombrar mi nombre, por uno de mis antiguos oyentes, entregando a la publicidad cada número calculado por mí en la pizarra durante la clase, pero demostrando en las partes teóricas la ignorancia del plajiario. Según supe despues disculpó su proceder diciendo que consideraba un mérito para él de haber esplicado a sus condiscípulos esta materia difícil de entender i haberles facilitado asi la repeticion.

El presente testo sobre las conferencias dadas en 1911, despues del cual se publicarán otros que tratarán de las dadas anteriormente, debe ser considerado exactamente como lo que es. Está léjos de ser un tratado completo de astronomia, pues en ninguna parte persigue el tema tratado en todas sus consecuencias, hasta haber agotado todas sus posibilidades. Trata solo lo que era menester que aprendiesen los discípulos que tenia en mi presencia, para educarlos de tal modo que llegasen a ser asistentes útiles del Observatorio. Ademas hai que tomar en consideracion que los modestos sueldos, hasta ahora votados en los presupuestos anuales del Estado para los empleados del Observatorio, no guardan proporcion alguna con la dificultad de la materia i con la elevacion de la ciencia astronómica, lo que a la vez tiene por consecuencia que las personas mas capaces del

pais no vean un aliciente suficiente para dedicarse a la astronomia i que aquéllos de mis discípulos que elijen como carrera vitalicia la astronomia, no obstante las modestas circunstancias esteriores que la rodean, deben estar poseidos de un sincero entusiasmo por esta hermosa ciencia, pues con su intelijencia les seria posible conseguir de otro modo una recompensa pecuniaria mucho mayor (mencionaré que esto acontece tambien en todos los demas paises del orbe). Como tampoco el curso de astronomia entra en el plan de estudios oficial de la Universidad, no tienen obligacion los estudiantes preparados suficientemente en matemáticas de asistir a mis conferencias i si asisten algunos lo hacen solo voluntariamente. La mayoria de los asistentes son oyentes i empleados del Observatorio, de los cuales no tienen varios tampoco la suficiente preparacion matemática que se exije en el viejo mundo a todo estudiante de astronomia, por la razon de que si tuvieran los medios necesarios para cursar un estudio con regularidad, escojerian entónces una profesion mas lucrativa. Para todas estas personas dotadas en jeneral de intelijencia superior a lo comun, pero que no poseian la suficiente preparacion matemática, era necesario de darles conferencias que les fueran comprensibles, con el objeto de que no careciesen de la necesaria preparacion para los cálculos que efectuaban en el Observatorio i comprendiesen debidamente lo que se trataba.

Asi se ha tratado la materia de la manera mas elemental posible, en los ejemplos no se ha omitido número alguno, pero casos mas complicados han sido solo mencionados, aunque rigurosamente deberian ser tratados con mayor detencion.

Sin embargo, no considero demas haber publicado este libro sobre mis conferencias. Si bien es cierto que su propagacion en Chile será reducida, no obstante es indudable que el elemento español en Sud-américa avanza tambien en las ciencias, i en otros paises donde existen condiciones análogas como en Chile para la astronomia, o bien existirán pronto, —pues la mayoria de las repúblicas del habla latina de

este continente no poseen todavia un Observatorio — podrá utilizar un colega de profesion este testo de enseñanza para sus conferencias, introduciendo pequeñas modificaciones i así puedan sus discípulos aprovecharse de él.

A mi no me fué posible de hacerme cargo de la redaccion de mis conferencias. El intenso trabajo en el antiguo i la construccion del nuevo Observatorio en Espejo exijieron casi todo el tiempo del infrascrito quien, ademas, encuentra dificultades todavia para dominar el idioma español.

Así se encargó el ayudante de la clase, don Rosauro Castro, de la tarea de redactar lo oido, lo que fué despues bien revisado ántes de ser entregado a la imprenta. El señor Castro estuvo ausente hasta fines de Mayo de 1911 en el Observatorio Astronómico de La Plata con el objeto de seguir observando desde allí el cometa Halley con el refractor de 43 cm. hasta que desapareciera. Durante el tiempo de su ausencia fué reemplazado por el astrónomo ayudante de la seccion Ecuatoriales, don Rómulo Grandón. El señor Prager, jefe de la seccion de Cálculos, tomó a su cargo la difícil tarea de correjir las pruebas. A todos estos señores agradezco sinceramente su colaboracion.

El presente tratado, que versa sobre mis conferencias dadas en la Universidad de Santiago, debe ser considerado pues solo como una modesta contribucion para la propagacion de la ciencia astronómica en este pais predestinado por la pureza de su cielo al cultivo de la astronomia, pero sí como una de las piedras — i como tal indispensable — que se emplearán para levantar un orgulloso edificio destinado a un Observatorio de primer órden i en el cual, bajo el cielo azul de Chile, se estudiará con preparacion i aficion la eterna cúpula celeste.

BIBLIOTECA NACIONAL
SECCION CHILENA

F. W. Ristenpart.

TEORIA DE LOS INSTRUMENTOS.

(Continuacion).

I. El instrumento de pasajes.

§ 1. *Introduccion.*—El curso del año 1910 lo terminamos con el estudio de los instrumentos de observacion; pero como dicho estudio no quedó completo, en el presente año de 1911 lo continuaremos, i aun volveremos sobre lo ya pasado para profundizarlo mas. En efecto, alcanzamos a pasar los errores del instrumento de pasajes i las correcciones debidas a ellos en las observaciones, pero sin detenernos a hacer las descripciones de cada uno de los órganos de que se compone un instrumento de pasajes moderno i al mismo tiempo sin hablar de sus funciones; pues bien, todo esto que es algo que se hace indispensable al conocimiento de un astrónomo consciente, sobre todo en el caso que tenga que hacer uso de tales instrumentos, lo pasaremos en el presente curso.

Pero ántes de continuar, vamos a repetir someramente las fórmulas ya obtenidas para la reduccion de las observaciones meridianas. Sabemos que el instrumento de que vamos a hablar se compone de un tubo metálico, terminando en ámbos estremos por lentes; las grandes lentes componen el objetivo i las pequeñas del estremo opuesto componen el

ocular. Ademas, este tubo puede jirar alrededor de un eje metálico que descansa en dos soportes fundados directamente en el suelo firme. Por otra parte, como al mirar por el ocular se tiene en el anteojo un campo de vista mas o ménos grande, para fijar las visuales se coloca en el interior del tubo, en el plano focal comun del objetivo i ocular, uno o varios hilos que son de tela araña.

Como en lo que sigue nos vamos a referir al instrumento

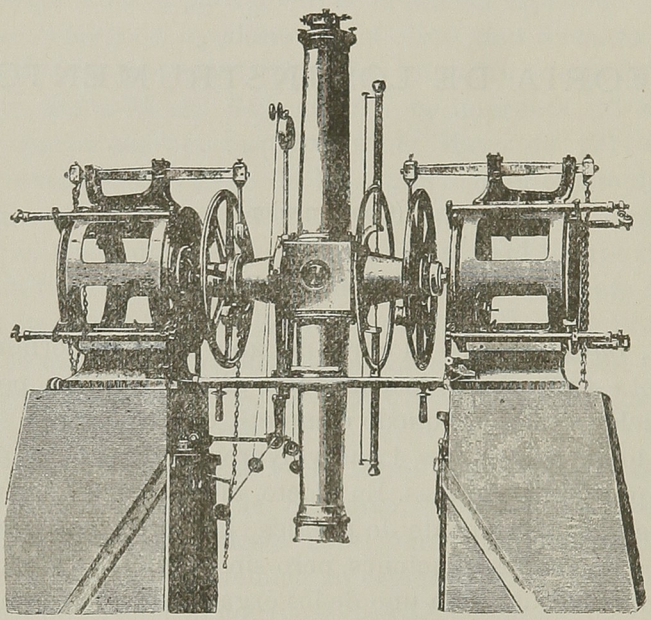

Figura 1.

de pasajes usado como instrumento meridiano, las condiciones que él debe cumplir son las siguientes: 1.º que el eje óptico del anteojo (así se llama la recta que une el centro del objetivo con uno de los hilos del retículo) sea perpendicular al eje de rotacion; 2.º que el eje de rotacion sea horizontal, i 3.º que este eje esté en la direccion Este Oeste, es decir, que él sea perpendicular al meridiano. Si estas tres condiciones no se cumplen habrá que correjir los resultados

de las observaciones i el modo cómo hacerlo es lo que vamos a hacer en seguida.

Sabemos que la tierra jira diariamente alrededor de un eje; la interseccion de la prolongacion de este eje con la esfera celeste constituye los polos celestes. El plano perpendicular a la línea de los polos que pasa por el centro de la tierra es el ecuador celeste (para el caso de la observacion de estrellas fijas no importa que se considere que dicho ecuador pase por un punto cualquiera de la superficie de la tierra). Todo círculo máximo que pasa por ámbos polos se llama círculo horario. Para fijar la posicion de un astro cualquiera en el cielo, es preciso que conozcamos sus coordenadas i éstas podrán ser polares o rectangulares i se podrán elejir muchos sistemas distintos; pero nosotros nos referiremos por el momento al caso de las coordenadas polares en el sistema ecuatorial. Se toma en este caso como plano fundamental el ecuador celeste; se llama declinacion de una estrella la distancia angular de esa estrella al ecuador celeste, i ésta se considera positiva en el hemisferio boreal i negativa en el austral. Como se comprende, no basta la declinacion para fijar en el cielo la posicion de una estrella, pues todas aquéllas que estén colocadas en un mismo plano paralelo al ecuador, tienen la misma declinacion. Entónces elejiremos otra coordenada, i para elejir ésta, fijaremos la posicion del círculo horario que pasa por la estrella, i eso lo conseguiremos determinando el ángulo que forma el círculo horario que pasa por la estrella con un círculo horario determinado que se toma como oríjen. El círculo horario-oríjen que se toma es el que pasa por el punto vernal o equinoccio de primavera, es decir, el punto de interseccion del ecuador con la eclíptica en que el sol en su movimiento aparente anual, pasa del hemisferio austral al boreal. Esta segunda coordenada que hemos definido se llama ascension recta i se cuenta de 0 a 360° o, mas comunmente, de 0 a 24^h en sentido contrario al movimiento diurno. Fácilmente se pueden reducir los grados a horas i vice-versa, pues sabemos que:

$1^h = 15^o$

$1^m = 15'$

$1^s = 15''$

Ascension recta i declinacion son pues las dos coordenadas que definen la posicion de un astro en el cielo.

Para determinar la ascension recta de un astro se hace uso de cronómetros siderales. Estos cronómetros marchan por decirlo así del mismo modo que las estrellas, es decir, que el puntero recorre toda la esfera del reloj en el mismo tiempo que una estrella da una vuelta completa en la esfera celeste. Estos relojes se arreglan de modo que marquen $0^h\ 0^m\ 0^s$ en el instante en que el punto vernal culmina en el meridiano del lugar que se considera (círculo horario que pasa por el zenit de ese lugar). Entónces, la hora a que una estrella pasa por el meridiano será precisamente su ascension recta, es decir, que si llamamos α la ascension recta del astro i T el tiempo observado en su pasaje por el meridiano, se tendrá la relacion $\alpha = T$, siempre que el reloj no tenga correccion alguna i, ademas, que el instrumento de observacion cumpla con las tres condiciones ya enunciadas mas atras. En el caso contrario, que será el mas frecuente i quizás él que siempre se presente en la práctica, habrá que agregar al segundo miembro ciertos términos correctivos, términos que luego vamos a determinar separadamente.

§ 2. *1.er término.—Correccion del reloj.*—Proviene esto de que el movimiento del reloj no sea exactamente igual al de las estrellas, i que por lo tanto la hora que él marca en un instante cualquiera no corresponda al ángulo que en ese mismo instante forma el círculo horario que pasa por el punto vernal con el meridiano, i la diferencia entre esas dos cantidades puede variar de un momento a otro porque el reloj puede tener alguna *marcha*. Si entónces llamamos C_p la correccion del péndulo en el instante de la observacion, $T + C_p$ será el tiempo sideral verdadero, i si no existieran otros errores tendríamos la igualdad:

$$\alpha = T + C_p \qquad (1)$$

§ 3. *2.º término.—Error de colimacion.*—Dijimos ántes que uno de los errores del instrumento consiste en que el eje óptico del anteojo no es perpendicular al eje de rotacion: el ángulo de desviacion de la normal al eje de rotacion se llama coli-

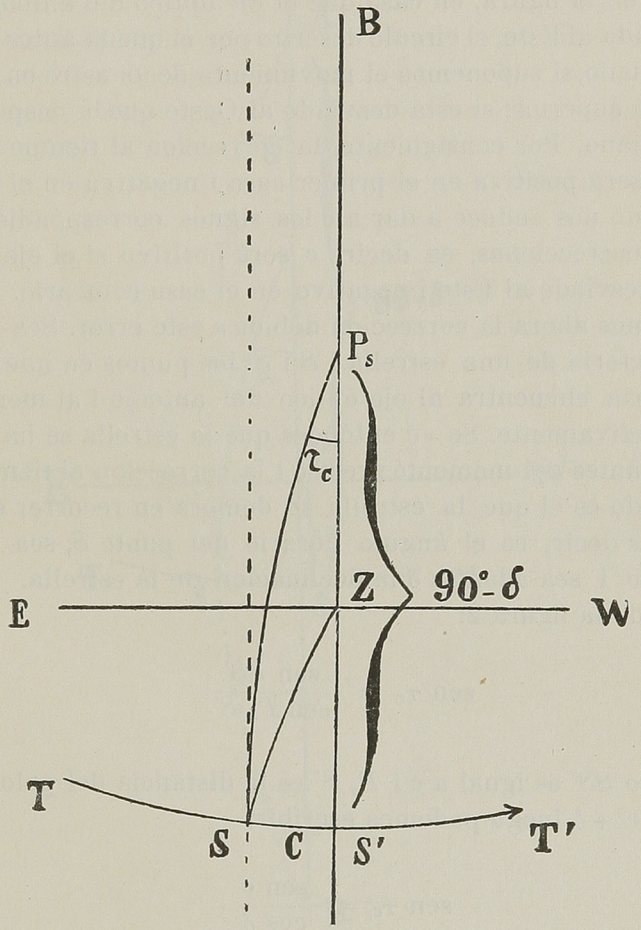

Figura 2.

macion, i el error proveniente de esta imperfeccion es el que vamos a tratar. Sea (fig. 2) *AB* el meridiano i *EW* la línea Este-Oeste, que al mismo tiempo será el eje de rotacion del anteojo, al cual supondremos una colimacion *c*. Se compren-

de fácilmente que al jirar el anteojo, el eje óptico no quedará jamas sobre el meridiano sino que describirá un cono cuya interseccion con la esfera celeste será un círculo paralelo al meridiano (indicado por la línea quebrada) i la distancia de ámbos será siempre igual a la colimacion c. Como se vé en la figura, en caso que el eje óptico del anteojo esté desviado al Este, el círculo descrito por él queda ántes que el meridiano, si suponemos el movimiento de un astro en culminacion superior; si está desviado al Oeste queda despues del meridiano. Por consiguiente, la correccion al tiempo observado será positiva en el primer caso i negativa en el segundo. Esto nos induce a dar a c los signos correspondientes a estas correcciones, es decir, c será positivo si el eje óptico está desviado al Este i negativo en el caso contrario. Determinemos ahora la correccion debida a este error. Sea TT' la trayectoria de una estrella i S i S' los puntos en que la trayectoria encuentra al eje óptico del anteojo i al meridiano respectivamente. Se vé entónces que la estrella se ha observado ántes del momento preciso i la correccion al tiempo observado es el que la estrella se demora en recorrer el arco SS', es decir, es el ángulo horario del punto S; sea τ_c ese ángulo i sea ademas δ la declinacion de la estrella. Se deduce de la figura 2:

$$\operatorname{sen} \tau_c = \frac{\operatorname{sen} SS'}{\operatorname{sen} P_s S'} \qquad (2)$$

Pero SS' es igual a c i $P_s S'$ es la distancia del polo sur, o sea $90^\circ + \delta$, luego podemos escribir:

$$\operatorname{sen} \tau_c = \frac{\operatorname{sen} c}{\cos \delta} \qquad (3)$$

i debido a la pequeñez de los ángulos τ_c i c, podemos decir que los senos son proporcionales a los arcos, i por lo tanto nos queda:

$$\tau_c = c \sec \delta \qquad (4)$$

§ 4. *3.er término.* — *Error de inclinacion.* — Sea *b* el ángulo de inclinacion del eje, que lo consideraremos positivo siempre que el estremo occidental del eje esté elevado sobre el horizonte. Este signo del ángulo de inclinacion queda justificado, como

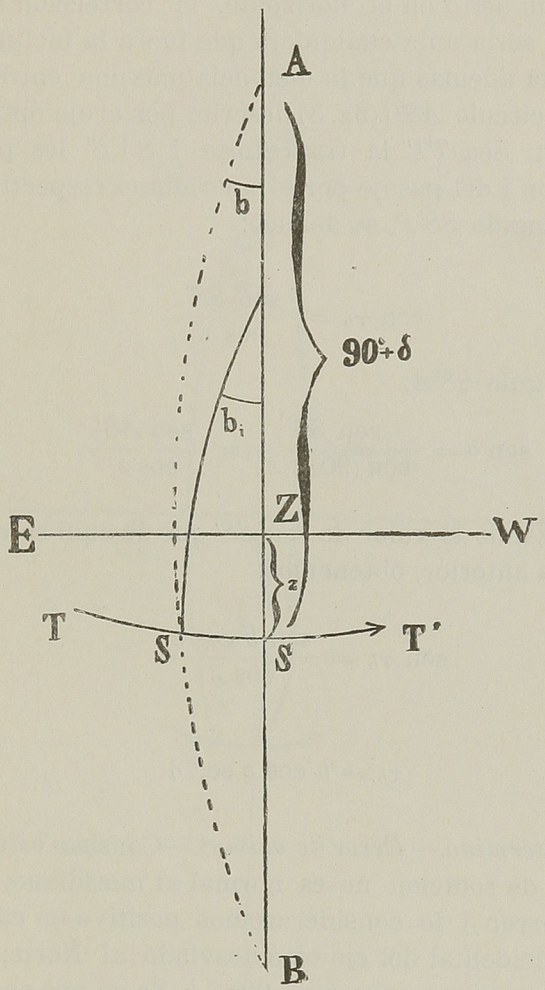

Figura 3.

en el caso anterior, porque la correccion al tiempo observado de una estrella en culminacion superior, es positiva si el estremo occidental del eje está levantado, i negativa en el otro caso. Si suponemos que el anteojo jira, vemos que el eje óp-

tico del anteojo describe un plano cuya interseccion con la esfera celeste es un círculo máximo; por lo tanto, tiene dos puntos (A i B) comunes con el meridiano, i estos puntos son los que corresponden al horizonte, i esto significa que si se pudiera observar un astro en el horizonte, la correccion al tiempo observado seria nula cualquiera que fuera la inclinacion del eje. Se nota ademas que la distancia máxima entre el meridiano i el círculo ASB (fig. 3) descrito por el eje óptico queda en el zenit. Sea TT' la trayectoria i S i S' los puntos de observacion i del pasaje por el meridiano respectivamente.

Del triángulo $SS'P_s$ se deduce:

$$\text{sen } \tau_b = \frac{\text{sen } SS'}{\cos \delta} \tag{5}$$

i del triángulo $SS'A$:

$$\text{sen } b = \frac{\text{sen } SS'}{\text{sen } (90^o + z)} = \frac{\text{sen } SS'}{\cos z} \tag{6}$$

i reemplazando el valor de sen SS' que de aquí se deduce en la fórmula anterior, obtenemos:

$$\text{sen } \tau_b = \frac{\text{sen } b \cos z}{\cos \delta} \tag{7}$$

o sea,

$$\tau_b = b \cos z \sec \delta \tag{8}$$

§ 5. *4.º término.—Error de azimut.*—Consiste este error en que el eje de rotacion no es normal al meridiano; llamaremos k el error i lo consideraremos positivo en caso que el estremo occidental del eje esté desviado al Norte; entónces el azimut de ese estremo será $90^o + k$. Se vé que en este caso el eje óptico del anteojo describe un plano cuya interseccion con la esfera celeste es un círculo máximo que corta al meridiano en el zenit i que forma con él en ese punto un ángulo igual al error de azimut k. Ademas se deduce de la figura 4 que si se observa un astro en el horizonte, se comete el

error máximo i si en el zenit, el error es cero. Determinemos tambien en este caso el ángulo horario τk del astro en

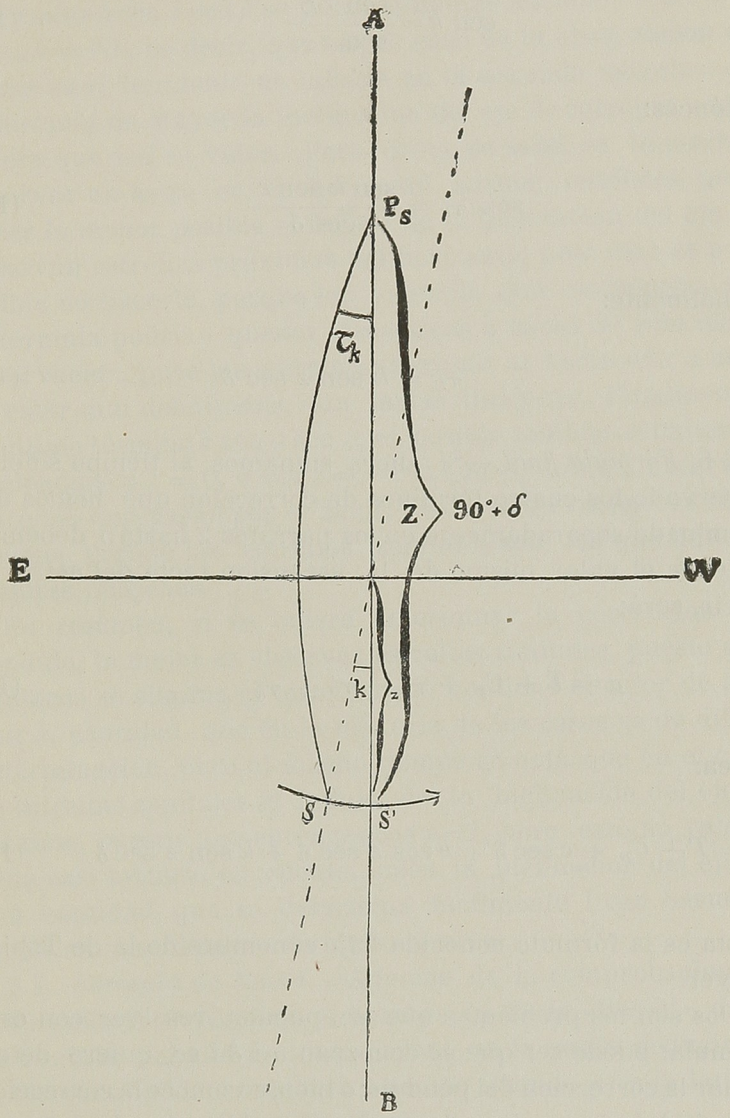

Figura 4.

el momento de la observacion. Tenemos del triángulo $P_s\ SS'$:

BIBLIOTECA NACIONAL
SECCION CHILENA

$$\text{sen } \tau k = \frac{\text{sen } SS'}{\cos \delta} \qquad (9)$$

pero del triángulo ZSS':

$$\text{sen } k = \frac{\text{sen } SS'}{\text{sen } z} \tag{10}$$

entónces:

$$\text{sen } \tau_k = \frac{\text{sen } k \text{ sen } z}{\cos \delta} \tag{11}$$

i finalmente:

$$\tau_k = k \text{ sen } z \text{ sec } \delta \tag{12}$$

§ 6. *Fórmula final.*—Si ahora sumamos al tiempo sideral observado los cuatro términos de correccion que hemos determinado separadamente en los párrafos 2 hasta 5, debemos obtener el valor mismo de la ascension recta del astro, es decir, será:

$$\alpha = T + C_p + \tau_c + \tau_b + \tau_k \tag{13}$$

o sea:

$$\alpha = T + C_p + c \text{ sec } \delta + b \cos z \text{ sec } \delta + k \text{ sen } z \text{ sec } \delta \tag{14}$$

i ésta es la fórmula conocida bajo el nombre de la de Tobías Mayer.

Dos son los problemas que se pueden resolver con esta fórmula: puede ser que se conozcan α i δ i se quiere determinar la correccion del péndulo; o bien, se conoce la correccion del péndulo i se quiere determinar α. Al tratar de determinar la correccion del péndulo se ve que el término c sec δ no es posible eliminarlo en ningun caso particular, puesto que cualquiera que sea la declinacion del astro, sec δ es siempre

mayor que la unidad en valor absoluto i como c es una cantidad finita, el producto de ámbas no puede ser igual a cero. El término $b \cos z \sec \delta$ se puede eliminar haciendo $\cos z = 0$, o sea $z = 90^\circ$, es decir, que en el caso de la observacion de astros en el horizonte no influye en el segundo miembro de la fórmula de Mayer la inclinacion del eje de rotacion, cualquiera que sea su valor. Pero como se sabe, es imposible observar un astro en el horizonte mismo; entónces, para hacer lo menor posible el influjo de la inclinacion del eje se observan estrellas próximas del horizonte; pero esto es preferible no hacerlo, porque las ventajas que eso aportaria a la fórmula podrian quedar destruidas a causa de una mala observacion, pues las estrellas próximas al horizonte, a mas de estar mui debilitadas, dan malas imájenes. Finalmente, el último término $k \operatorname{sen} z \sec \delta$, es posible tambien eliminarlo haciendo $\operatorname{sen} z = 0$, o sea $z = 0^\circ$, lo que equivale a observar estrellas que pasan por el zenit, i esta observacion es fácil i buena, porque las estrellas zenitales son las que dan las mejores imájenes.

En resúmen, si se quiere determinar la correccion del péndulo, lo mejor es observar estrellas zenitales, puesto que entónces se elimina el término que contiene el error de azimut k, cantidad que en la mayoría de los casos es de difícil determinacion, pero al mismo tiempo se nota que en el caso de estrellas zenitales el influjo de la inclinacion del eje es máximo, puesto que entónces $\cos z = 1$, pero esto no vale la pena casi tomarlo en cuenta, pues la inclinacion del eje es una cantidad que se determina fácilmente i con bastante precision si se dispone de un buen nivel.

§ 7. *Fórmula de Bessel.*—Ademas de la comprobacion de la fórmula conocida bajo el nombre de la de «Bessel», dada en la clase del año próximo pasado, se la puede deducir de la fórmula de Mayer de esta manera: Cuando ϕ es la latitud del observatorio, existe la relacion

$$z = \delta - \phi \qquad (15)$$

para los pasajes superiores en el hemisferio austral. Introduciendo (15) en (14) i resolviendo obtenemos

$$\alpha = T + C_p + c \sec \delta + b \cos \phi - k \operatorname{sen} \phi + (b \operatorname{sen} \phi + k \cos \phi) \operatorname{tg} \delta \qquad (16)$$

pongamos:

$$\left.\begin{aligned} m &= b \cos \phi - k \operatorname{sen} \phi \\ n &= b \operatorname{sen} \phi + k \cos \phi \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

entónces resultará la fórmula de *Bessel*:

$$\alpha = T + C_p + m + n \operatorname{tg} \delta + c \sec \delta \qquad (18)$$

La fórmula (17) tiene un aspecto diferente a la forma en que la presentan los testos que salen para el hemisferio boreal, proveniente de que el estremo Oeste del eje del meridiano tiene en el hemisferio boreal el azimut $90^\circ - k$, en el hemisferio austral el azimut $90^\circ + k$, siempre contando los azimutes desde el Sur hácia el Oeste.

§ 8. *Nociones jenerales.*—Hai ademas otros errores que se pueden producir en el instrumento de pasajes, como ser los movimientos que pueda tener la base, que sostiene el instrumento, debidos a los cambios de temperatura o movimientos, provenientes de las vibraciones del terreno en las inmediaciones de la instalacion; pero de estos últimos se puede decir hoi dia que su influencia debiera estar completamente eliminada por cuanto la fundacion que sostiene el instrumento debe estar aislada de los alrededores por medio de pozos, de modo que las vibraciones que vienen en forma de pequeñas ondas, al llegar al pozo se rompen i cambian de direccion sin ir a tocar las fundaciones, i en caso de llegar a ellas, están ya tan debilitadas que su efecto debe ser completamente despreciable. En cuanto a los movimientes debidos a cambios de temperatura son inevitables i materia de un prolijo estudio siempre que se disponga de una buena mira que sirva como línea de colimacion i pueden en este

caso introducirse en las fórmulas los términos correctivos correspondientes a ellos.

Hai que notar que las fórmulas sencillas no son aplicables a *todos* los casos de las observaciones meridianas, por ejemplo, a las observaciones de planetas i cometas, porque estos astros ademas de participar del movimiento diurno comun a todas las estrellas tienen un movimiento propio que es preciso tomar en cuenta al hacer las reducciones. Ademas, esas fórmulas se aplican solo en el caso en que las cantidades c, b i k o m i n sean pequeñas, puesto que al no ser así, no es posible suponer, como lo hemos hecho, que los senos de los ángulos sean proporcionales a los arcos. En casos de valores grandes de c, b i k se aplican fórmulas exactísimas, fórmulas que veremos al tratar del teodolito universal.

Recordaremos tambien aquí algo de la multiplicacion de las observaciones. Hasta ahora hemos considerado el caso mas simple, que no se encuentra en la práctica, de que exista en el plano focal del objetivo i ocular un solo hilo. En la práctica se colocan varios hilos i esto tiene por objeto hacer varias observaciones a la vez. En efecto, si suponemos que se observan los pasajes de un astro por varios hilos, se pueden reducir los tiempos observados a un solo hilo que se llama hilo medio. Entónces se obtienen para este hilo tantos valores del tiempo sideral como hilos se hayan observado i si tomamos el promedio de todos esos tiempos quedarán eliminados en gran parte los errores accidentales de la observacion, i el resultado final será tanto mas exacto cuanto mayor sea el número de hilos observados. Ahora para hacer la reduccion al hilo medio podemos suponer que la colimacion del hilo medio sea 0; entónces a cada uno de los otros hilos corresponderá cierta colimacion respecto del hilo medio, entónces, si queremos reducir ese hilo al hilo medio, bastará que le hagamos la correccion de colimacion, es decir, si f es la distancia ecuatorial del hilo considerado al hilo medio m (fig. 5) i δ la declinacion del astro, f sec δ será la reduccion. De mas está decir que los diversos términos f sec δ serán aditivos o substractivos segun que el hilo consi-

derado esté ántes o despues que el hilo medio. La correccion $f \sec \delta$ se aplica solo al caso en que la estrella no sea mui polar. En este caso el término correctivo se debe deducir de la fórmula exacta sen t = sen f sec δ en que t representa la reduccion al hilo medio.

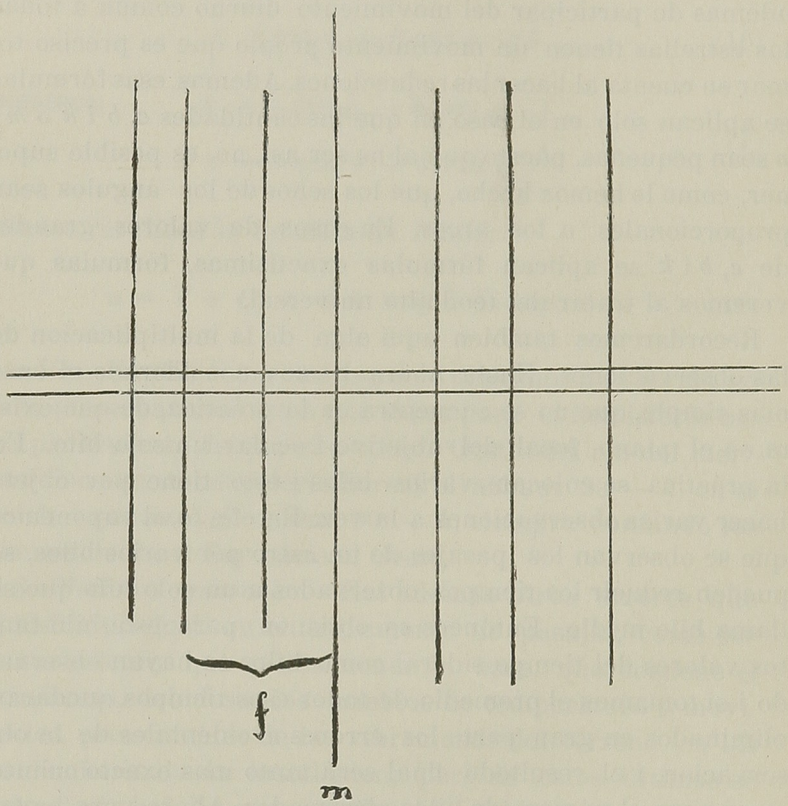

Figura 5.

Las fórmulas obtenidas solo consideran los errores instrumentales; pero para ser exactos debemos considerar tambien los errores provenientes de otras causas. Así siempre que miramos una estrella no la vemos en el lugar que ella efectivamente ocupa en el cielo sino en otro distinto.

Una de estas causas de error es la refraccion atmosférica. Efectivamente, sabemos que el globo terráqueo está rodeado de una capa de atmósfera mas o ménos delgada relativamente a las distancias de la superficie de la tierra, capa que podemos suponer compuesta de una sucesion de angostísimas capas

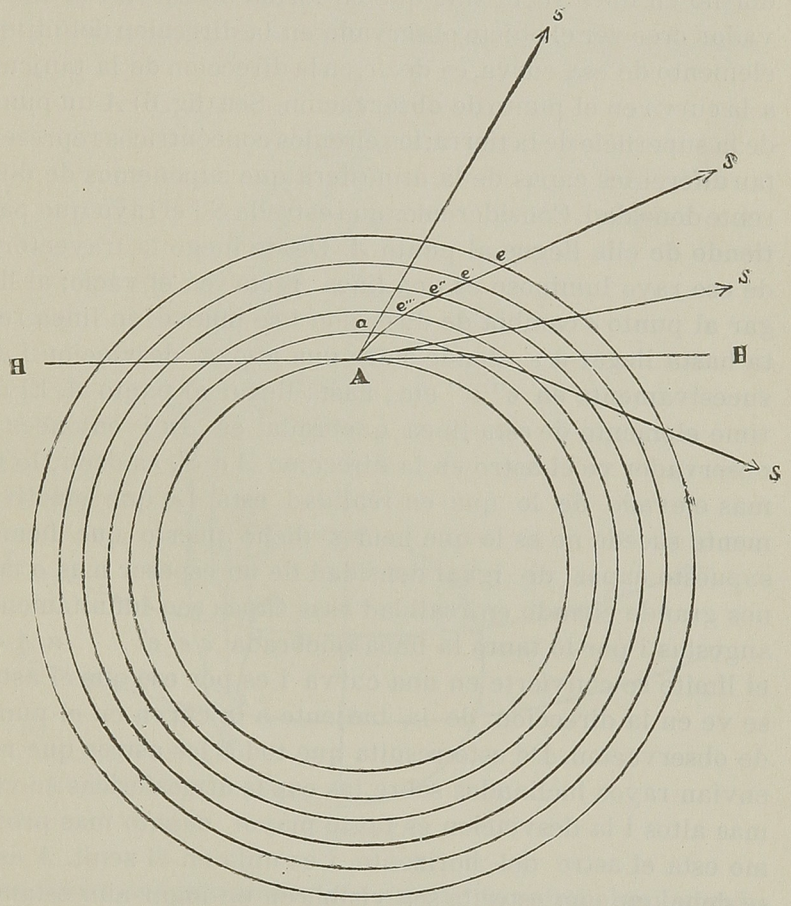

Figura 6.

de densidades decrecientes i cada vez mas enrarecidas, hasta que al fin concluye la atmósfera de un modo insensible sin saberse definitivamente cual es la separacion precisa entre la atmósfera i el vacío infinito. Sabemos tambien que los rayos luminosos al moverse en medios de densidades diferentes

se refractan, es decir, cambian de direccion acercándose a la normal comun a ámbos medios en caso que el movimiento sea del medio ménos denso al mas denso. De aquí resulta que los rayos emitidos por un astro al entrar en la atmósfera se van curvando poco a poco i llegan al ojo del observador no en línea recta sino que en forma de curva i el observador cree ver el objeto observado en la direccion del último elemento de esa curva, es decir, en la direccion de la tanjente a la curva en el punto de observacion. Sea (fig. 6) A un punto de la superficie de la tierra; los círculos concéntricos representan diferentes capas de la atmósfera que suponemos de diferente densidad. Consideremos una estrella S i el rayo que partiendo de ella llegue al punto A. Desde luego la trayectoria de ese rayo luminoso es una línea recta en el vacío; al llegar al punto e cambia de direccion i se mueve en línea recta hasta llegar a e', donde sufre una nueva desviacion i así sucesivamente en e'' e''' etc., hasta llegar al punto A. El último elemento de esta línea quebrada es Aa i entónces el observador ve el astro en la direccion $A\,a\,S'$, es decir, lo ve mas elevado de lo que en realidad está. Lo que efectivamente sucede no es lo que hemos dicho puesto que hemos supuesto capas de igual densidad de un espesor mas o ménos grande cuando en realidad esas capas son infinitamente angostas i por lo tanto la línea quebrada $e\,e'\,e''\ldots.\,a\,A$ en el límite se convierte en una curva i es por eso que el astro se ve en la direccion de la tanjente a la curva en el punto de observacion. De esto resulta que todos los astros que nos envian rayos inclinados sobre las capas atmosféricas se ven mas altos i la desviacion es tanto mayor cuanto mas próximo está el astro del horizonte i es nula en el zenit. A esto se debe que una estrella sea visible en un lugar aun estando debajo del horizonte.

Este caso queda ilustrado por la estrella S_1 de la figura 6, que se ve como si estuviera en S'_1.

Estudiaremos por el momento la influencia de la refraccion en las observaciones meridianas, dejando para despues un estudio teórico completo de la refraccion astronómica.

§ 9. *Influencia de la refraccion en las observaciones de pasajes.*—Acabamos de ver que debido a la refraccion atmosférica todas las estrellas se levantan, i esto se efectúa en un círculo vertical. En los objetos mui próximos del horizonte existen tambien desviaciones en otros sentidos, constituyendo lo que los jeodestas llaman refraccion lateral, fenómeno parecido al que en el caso de la reflexion se llama espejismo.

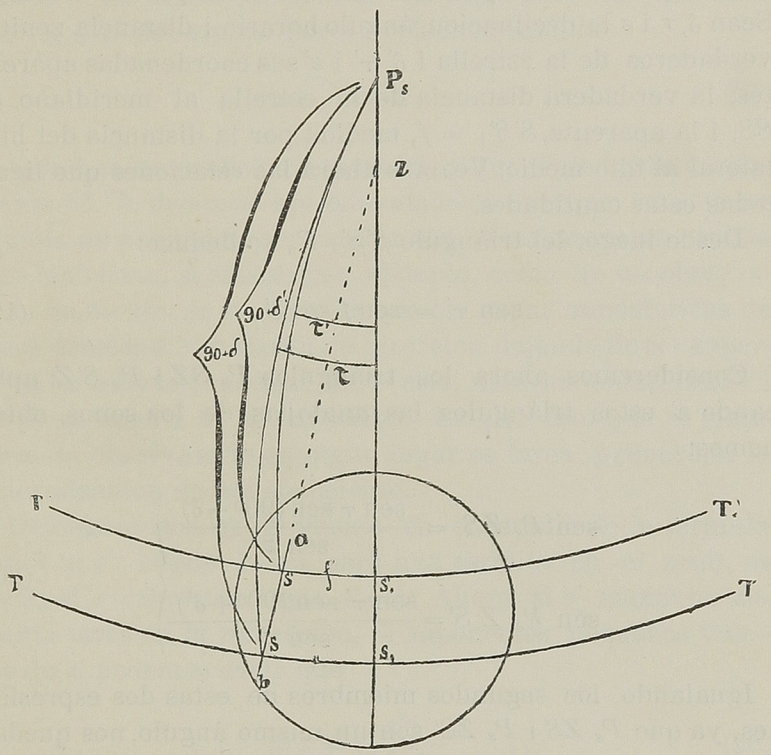

Figura 7.

Nosotros no nos ocuparemos aquí de la refraccion lateral, porque en las observaciones astronómicas se observan los astros solo a cierta altura sobre el horizonte, altura en la que ya la refraccion lateral no influye.

Sabemos que las trayectorias verdaderas de los astros en el cielo debidas al movimiento diurno, son circunferencias; pero debido a la refraccion esas circunferencias se trasforman en otras curvas que no son equidistantes de la circun-

ferencia orijinal, sino que tienen una distancia máxima en el horizonte, i mínima, al pasar por el meridiano.

Vamos ahora a ver qué influencia tiene la refraccion en la reduccion al hilo medio. Sea (fig. 7) $P_s N$ el meridiano, P_s el polo Sur, Z el zenit, $T T_1$ la trayectoria verdadera de una estrella i $T' T'_1$ la trayectoria afectada por la refraccion; representamos por un círculo el campo del anteojo. Sean δ, τ i z la declinacion, ángulo horario i distancia zenital verdaderos de la estrella i $\delta' \tau'$ i z' sus coordenadas aparentes; la verdadera distancia de la estrella al meridiano es SS_1 i la aparente, $S'S'_1 = f$, medida por la distancia del hilo lateral al hilo medio. Veamos ahora las relaciones que ligan todas estas cantidades.

Desde luego, del triángulo $S'S'_1 P_s$ se deduce:

$$\operatorname{sen} \tau' = \operatorname{sen} f \sec \delta' \tag{19}$$

Consideremos ahora los triángulos $P_s SZ$ i $P_s S'Z$; aplicando a estos triángulos las analojías de los senos, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} P_s ZS &= \frac{\operatorname{sen} \tau \operatorname{sen} (90^o + \delta)}{\operatorname{sen} z} \\ \operatorname{sen} P_s Z S' &= \frac{\operatorname{sen} \tau' \operatorname{sen} (90^o + \delta')}{\operatorname{sen} z'} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Igualando los segundos miembros de estas dos espresiones, ya que $P_s ZS$ i $P_s ZS'$ son un mismo ángulo, nos queda:

$$\frac{\operatorname{sen} \tau \cos \delta}{\operatorname{sen} z} = \frac{\operatorname{sen} \tau' \cos \delta'}{\operatorname{sen} z'} \tag{21}$$

$$\text{o} \qquad \operatorname{sen} \tau = \frac{\operatorname{sen} \tau' \cos \delta'}{\cos \delta} \cdot \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z'} \tag{22}$$

i en vista de la ecuacion (19):

$$\operatorname{sen} \tau = \operatorname{sen} f . \sec \delta . \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z'} \tag{23}$$

Espresemos ahora z en funcion de z'; llamemos a la refraccion de una estrella, es decir, a es el ángulo de que se ve elevada la estrella debido a la refraccion atmosférica, o sea:

$$z = z' + a \qquad (24)$$

siendo z la distancia zenital verdadera i z' la aparente. Ahora, a se determina por la relacion sencilla:

$$a = k \operatorname{tg} z' \qquad (25)$$

en que k es un coeficiente numérico que vale aproximadamente 57."5; decimos aproximadamente porque este valor cambia un poquito de un lugar a otro. Fácilmente se esplica este fenómeno, si existe, por ejemplo, cerca de un observatorio un monte, se comprende que las capas atmosféricas de igual densidad cambiarán de direccion dejando de ser superficies de esferas concéntricas, i ésto, naturalmente, influirá en el coeficiente de la refraccion. Es por ésto que al instalarse un observatorio en algun lugar es tarea primordial la determinacion de ese coeficiente.

Detengámonos un momento en el estudio de la fórmula $a = k \operatorname{tg} z'$. Desde luego, para una estrella en el zenit, es decir, si $z' = 0$ resulta que $a = 0$. Ahora si z' aumenta, aumenta tambien la refraccion. Si suponemos pequeños valores de z, podemos decir que

$$\operatorname{tg} z' = \frac{z'^{\circ}}{57.3} \qquad (26)$$

i por lo tanto

$$a = \frac{57".5}{57.3} z'^{\circ}, \qquad (27)$$

lo que dá aproximadamente $a" = z'^{\circ}$, es decir, para distancias zenitales pequeñas es el número de segundos de la refraccion igual a los grados de la distancia zenital; pero ésto es solo para pequeños valores de z, por ejemplo, si $z' = 1^{\circ}$, resulta $a = 1"$;

pero si suponemos $z' = 45^o$, tg $z' = 1$ i $\alpha = 57''.5$ i no 45" como pudiera creerse a primera vista. Ahora si suponemos $z' = 90^o$ resultaria tg $z' = \infty$ i por lo tanto $\alpha = \infty$, lo que equivaldria a decir que una estrella en el horizonte se veria en el zenit o mas allá; pero ésto no es efectivo, i el error proviene de que al decir que $\alpha = k$ tg z' hemos dado una fórmula que no es rigurosamente justa, pero que es suficiente para el caso de las observaciones astronómicas corrientes en que jamas se observan astros en el horizonte, ni siquiera en sus proximidades. Para obtener la fórmula justa, como la deduciremos mas tarde, debemos agregar al término k tg z' una série de otros términos.

Volviendo a lo anterior, podemos poner:

$$\frac{\text{sen } z}{\text{sen } z'} = \frac{\text{sen } (z' + \alpha)}{\text{sen } z'} = \frac{\text{sen } z' \cos \alpha + \cos z' \text{ sen } \alpha}{\text{sen } z'} \qquad (28)$$

pero podemos reemplazar cos α por la unidad i sen α por α sen 1", i obtenemos:

$$\frac{\text{sen } z}{\text{sen } z'} = \frac{\text{sen } z' + \alpha \text{ sen } 1'' \cos z'}{\text{sen } z'} = 1 + \alpha \text{ sen } 1'' \text{ cotg } z' \qquad (29)$$

e introduciendo en vez de α su valor k tg z', nos queda:

$$\frac{\text{sen } z}{\text{sen } z'} = 1 + k \text{ sen } 1'' \qquad (30)$$

Ahora:

$$k = 57''.5 \quad \text{i} \quad \text{sen } 1'' = \frac{1}{206265}$$

Luego

$$k \text{ sen } 1'' = \frac{57.5}{206265} = 0.00028 \qquad (31)$$

i por lo tanto:

$$\frac{\text{sen } z}{\text{sen } z'} = 1.00028 \qquad (32)$$

i si lo introducimos en la ecuacion (23) resulta:

$$\text{sen } \tau = \text{sen } f.\ \text{sec } \delta.\ 1.00028 \qquad (33)$$

Sea ahora:

$$f_0 = 1.00028\, f \qquad (34)$$

entónces en vista de la pequeñez de f resulta:

$$\text{sen } \tau = \text{sen } f_0\ \text{sec } \delta \qquad (35)$$

o $\tau = f_0.\ \text{sec } \delta$, si sec δ no es mui grande.

Esta ecuacion importantísima nos dice que observando τ i multiplicándolo por cos δ, el coseno de la declinacion *verdadera*, se obtiene una cantidad f_0, que sin ser la distancia del hilo buscada, *sirve para obtener despues para otra estrella el valor de* τ, si se multiplica este f_0 por la secante de la declinacion *verdadera* (i no aparente).

Si en vez de determinar la distancia de hilos por el método de estrellas se procede por un método terrestre cualquiera, es decir, si se obtiene f, entónces hai que multiplicarlo por 1.00028 para obtener f_0, que se usa en la reduccion de las estrellas al hilo medio segun la fórmula (35).

La diferencia entre f i f_0 es siempre pequeña, por ejemplo en el caso de nuestro anteojo meridiano la distancia del hilo mas alejado es $f = 47^s$; luego $f_0 = 1.00028 \times 47^s$, i por lo tanto:

$$f_0 - f = 47^s\ (1.00028 - 1) = 47^s \times 0.00028 = 0^s.013$$

§ 10. *Influencia de la paralaje en las observaciones meridianas.*—Dijimos ántes que las coordenadas de una estrella no varian segun que se considere cualquier lugar de la tierra como orijen de coordenadas, i ésto es debido a la gran distancia a que se encuentran de nosotros las estrellas fijas. No sucede ésto con los cuerpos del sistema solar, cuya distancia a la tierra es relativamente pequeña. Para éstos cuerpos resulta que las coordenadas determinadas desde un punto no son iguales a las determinadas desde otro. Representemos

en la figura 8 la tierra cuyo centro es C; supongamos un planeta cualquiera o cometa que en cierto instante se encuentra en P; si consideramos un lugar de observacion S, el cuerpo se verá proyectado en la esfera celeste en el punto P_S. Si consideramos otro punto de observacion B, el cuerpo se verá proyectado en P_B; i la distancia $P_S P_B$ puede ser tan

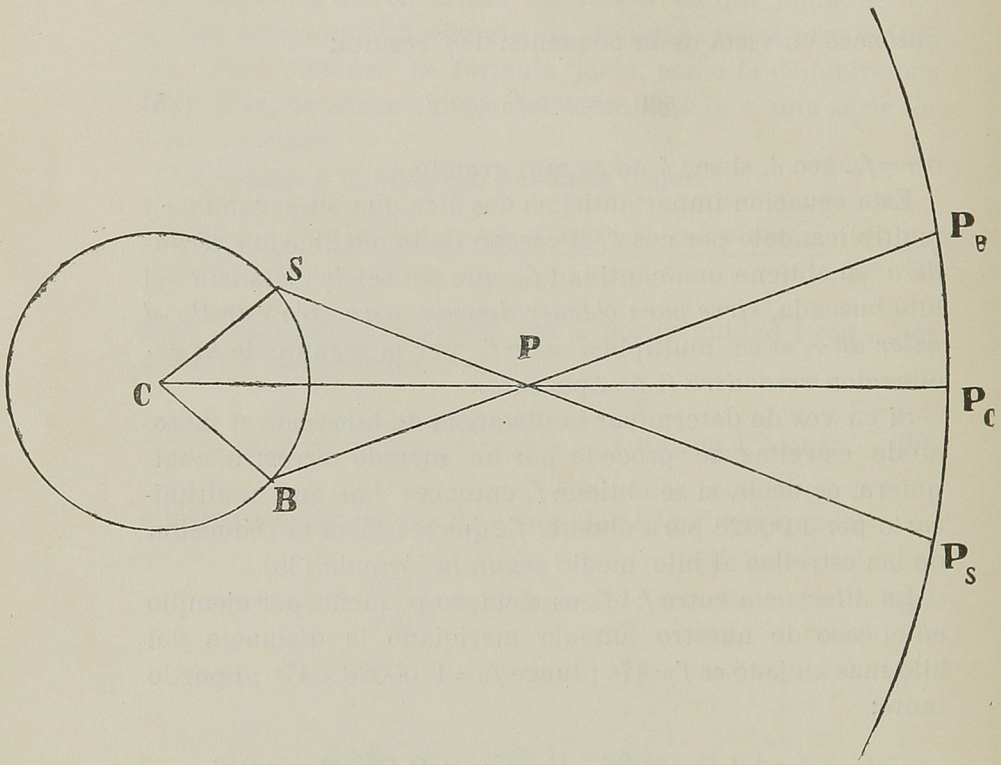

Figura 8.

grande que un mismo planeta o cometa puede verse proyectado sobre dos estrellas distintas, si se observa de dos lugares suficiente alejados. Entónces, para hacer comparables las observaciones hechas en diferentes lugares de la superficie de la tierra, las coordenadas encontradas se reducen a un punto determinado, i se toma como tal el centro de la tierra.

Se llama paralaje de un astro respecto de un punto cualquiera de la superficie terrestre el ángulo bajo el cual se veria el radio terrestre correspondiente a ese lugar, visto desde el centro del astro. Es decir, en la figura 8, la paralaje del astro P es el ángulo SPC, si se considera el punto S, i BPC, si se considera el punto B.

Se comprende que conociendo la paralaje se puede determinar la posicion en que se veria el astro si se pudiera observar desde el centro de la tierra.

Fácilmente se podria determinar la paralaje de un astro si se pudieran hacer dos observaciones simultáneas de él: una del lugar considerado i la otra desde el centro de la tierra. pues entónces se conocerian los puntos P_s i P_c , i la distancia entre ellos nos daria la paralaje. Pero se puede proceder de otro modo: en vez de observar desde el centro de la tierra se observa desde otro punto, por ejemplo, desde B, es decir, se determina la suma de las dos paralajes $P_S P_B$, i despues, resolviendo el paralelógramo $SP BC$, se determinan las dos paralajes a la vez. En efecto, se conocen en este paralelógramo los lados SC i BC i los ángulos SCB i SPB, este último igual al arco P_b P_s determinado por la observacion. En cuanto al ángulo SCB, se determina conociendo las diferencias de la latitud i lonjitud jeográficas de los dos lugares. Conocidos entónces los elementos nombrados se pueden determinar SP, BP i CP, segun el problema llamado de Pothenot, i en seguida determinar con facilidad las paralajes SPC i BPC. Las observaciones del astro en S i B deben ser simultáneas i en caso de no serlo fácilmente se las puede reducir al mismo instante.

§ 11. *Nociones jenerales de la paralaje.* — Como se puede ver con facilidad la paralaje de un astro, tal como la hemos definido, no es una cantidad fija para cada astro, sino que depende de la posicion del astro: ella será máxima cuando el astro está en el horizonte, disminuirá hasta llegar al meridiano, donde tiene su valor mínimo i luego empieza a aumentar nuevamente; aun podrá ser cero en caso que el astro pase por el zenit del lugar considerado. La paralaje del astro cuando éste está en el horizonte se

llama paralaje horizontal i es un valor constante para cada astro i para cada lugar. La paralaje horizontal es un máximo, pero no un máximum-maximorum, i éste se obtendrá si consideramos un lugar del ecuador, en que el radio terrestre es máximo. La paralaje horizontal de un punto cualquiera del ecuador se llama paralaje horizontal-ecuatorial.

Conocida la paralaje horizontal-ecuatorial de un astro se puede determinar fácilmente la distancia del astro al centro de la tierra.

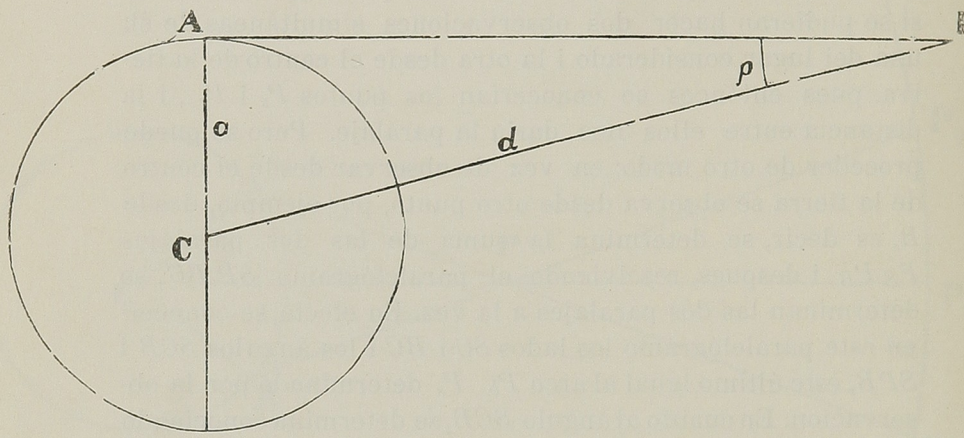

Figura 9.

En efecto, sea (fig. 9) a el radio ecuatorial de la tierra, p la paralaje ecuatorial horizontal de un astro P i d la distancia del astro al centro de la tierra. Del triángulo rectángulo APC, se deduce:

$$\text{sen } p = \frac{a}{d} \qquad (36)$$

de donde

$$d = \frac{a}{\text{sen } p} \qquad (37)$$

Ejemplo.—Uno de los astros para que con mas ahinco se ha tratado de determinar la paralaje es el Sol i los distinto

astrónomos que la han determinado han obtenido números diferentes, siendo el mas probable, i el que nosotros aceptaremos $p = 8''.800$; ademas $a = 6377.4$ klm., por lo tanto:

$$d = \frac{6377.4}{\text{sen } 8''.800} = \frac{6377.4 \times 206265}{8.800}$$

de donde se deduce $d = 149480000$ klm. mas o ménos, para el valor de la distancia del Sol.

Que la paralaje ecuatorial-horizontal del Sol es de 8".8, quiere decir, que un radio ecuatorial de la tierra se veria desde el centro del Sol, estando este en el horizonte, bajo un ángulo de 8".8; el diámetro de la tierra se veria entónces bajo un ángulo de 17".6.

Para formarnos una idea de este ángulo veamos desde que distancia deberíamos mirar, por ejemplo, una moneda de 20 cts. para ver su diámetro bajo este mismo ángulo de 17".6. Supondremos como diámetro de la moneda 2 cm.; entónces, tendremos:

$$d = \frac{2}{\text{sen } 17''.6} \text{ cm.}$$

o que es lo mismo:

$$d = \frac{2 \times 206000}{17.6} = \frac{412000}{17.6} = 24000 \text{ cm.}$$

$$d = 240 \text{ m}$$

es decir que la tierra vista desde el centro del Sol se veria del tamaño de una moneda de 20 cts. vista a la distancia de 240 metros!

Para la reduccion de las observaciones al centro de la tierra basta jeneralmente considerar ésta como una esfera; pero en el caso de la luna, cuya distancia a la tierra es mui pequeña comparada con la de los otros planetas, es preciso considerar la elipticidad de la tierra. (La paralaje ecuatorial-horizontal media de la luna es de 57'). Entónces, para deducir las fórmulas aplicables a cualquier caso consideraremos el caso jeneral considerando la tierra como un elipsoi-

de de revolucion, cuerpo jeométrico al cual la tierra se asemeja mas.

§ 12. *Latitud jeográfica i jeocéntrica.*— Representemos, entónces, en la figura 10 la tierra, cuya forma la exajeramos bastante: *PP'* es la línea de los polos i *AA'* el ecuador; la elipse dibujada representa pues el meri-

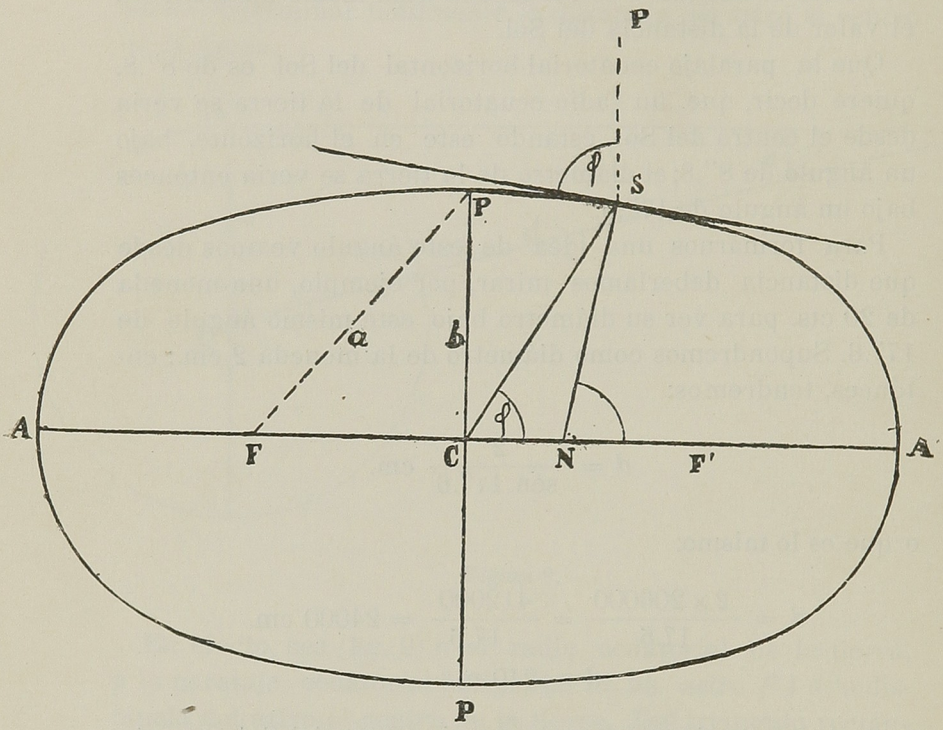

Figura 10.

diano correspondiente al punto *S*. Tracemos la tanjente a la elipse en el punto *S* i la normal *SN*, la tanjente representará el horizonte i la normal es la vertical del lugar. El plano del ecuador i la vertical de un lugar son dos cantidades jeométricamente definidas, i el ángulo que ellas forman es la latitud jeográfica del lugar, es decir, en el caso de la figura 10

el ángulo $SNA' = \phi$ es la latitud jeográfica de S. Como se vé la vertical no pasa por el centro C de la tierra, como sucederia si la tierra fuera esférica. Consideraremos aquí tambien el ángulo que forma el ecuador con la recta que une el punto considerado S con el centro C de la tierra; éste ángulo es llamado latitud jeocéntrica, lo designaremos por ϕ'.

Vamos ahora a ver que relaciones existen entre ϕ i ϕ', es decir, entre ámbas latitudes, la jeográfica i la jeocéntrica. Desde luego sabemos que la latitud jeográfica se determina por métodos astronómicos bastante sencillos, solo recordando que ella es numéricamente igual a la altura del polo visible sobre el horizonte. En cuanto a la latitud jeocéntrica, se determina, una vez conocida ϕ, por medio de las fórmulas que luego determinaremos.

Ante todo vamos a dar aquí las definiciones i designaciones de los elementos de la elipse que han de figurar en las fórmulas. Designaremos por a el radio del ecuador o semi-eje mayor de la elipse, i por b el radio polar o semi-eje menor. Hai que advertir, que todos los radios ecuatoriales, como los de todo círculo paralelo a éste son iguales entre sí. Achatamiento es la relacion de la diferencia de los dos semi-ejes al eje mayor, es decir, llamado α el achatamiento, tenemos:

$$\alpha = \frac{a - b}{a} . \qquad (38)$$

Eccentricidad es la relacion de la distancia focal al semi-eje mayor, es decir, que si la designamos por e, tenemos que:

$$e = \frac{FC}{AC}, \qquad (39)$$

pero esta cantidad la podemos espresar en funcion de a i de b; en efecto, se deduce del triángulo FCP que

$$FC^2 = a^2 - b^2 \qquad (40)$$

i como $AC = a$, resulta que:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} . \qquad (41)$$

Como se vé, basta la determinacion de a i b, puesto que a i e se pueden determinar por medio de las fórmulas. Muchos han sido los astrónomos que han determinado los valo-

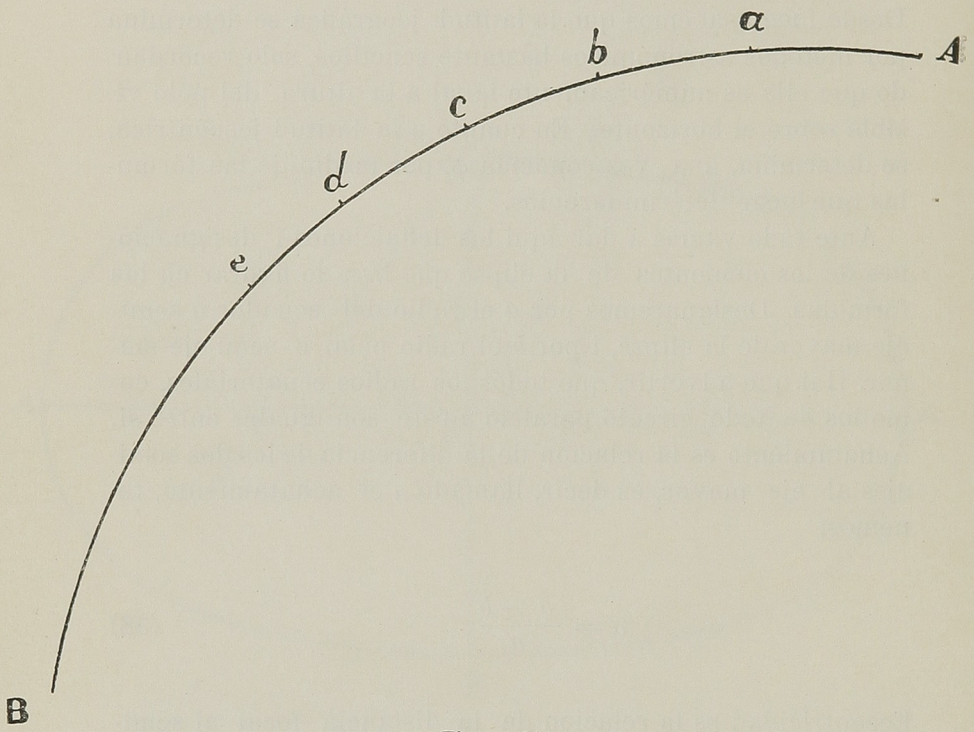

Figura 11.

res de a i b i todos ellos lo han hecho por mensuras directas de un arco de meridiano mas o ménos grande. El procedimiento seguido es el siguiente: se toman dos puntos A i B (fig. 11) situados en el mismo meridiano; en seguida por medio de triangulaciones se determina lo mas exactamente posible la distancia AB, lo mismo que las distancias intermedias menores Aa, ab, bc, etc.; ademas, en cada uno de los puntos intermedios a, b, c... lo mismo que en A i B se de-

termina la latitud jeográfica. Una vez hechas todas estas medidas se trató de averiguar primeramente a que curva jeométrica correspondia el arco AB i se llegó a la conclusion que era a una elipse. Una vez sentado ésto por procedimientos matemáticos se puede llegar a la determinacion de los dos semi-ejes de la elipse, puesto que se conocen una série de puntos de ella determinados por sus distancias verdaderas a otro punto fijo, i ademas, por las tanjentes a la elipse en todos esos puntos, ya que dijimos que se determina la latitud jeográfica en cada uno de ellos.

Este ha sido el procedimiento que, como dijimos, han seguido muchos astrónomos para la determinacion de a i de b; pero de todos los valores obtenidos por ellos, diferentes naturalmente uno de otros, los que se aceptan hasta hoi dia como los mejores son los que obtuvo hace unos cien años el astrónomo aleman Bessel.

Bessel fué director del observatorio astronómico de Königsberg i fué contemporáneo i colaborador del gran matemático Gauss; i precisamente en la determinacion del valor mas probable de a i de b se basó Bessel en los métodos de cálculo dados a conocer por Gauss. Estos valores son los siguientes:

$$a = 6377.39715 \text{ klm.}$$

$$b = 6356.07896 \text{ »}$$

$$\alpha = \frac{1}{299.1528}$$

$$e = 0.08169683$$

De estos valores basta retener en la memoria el valor de a i el de α; pero no los números exactos, sino aproximados $a = 6377$ klm. i $\alpha = \frac{1}{300}$. Entónces, si se quiere determinar b basta restar a a la trescienteava parte de su valor, es

decir, restarle 21 i se obtiene entónces $b = 6356$ klm., que resulta de la definicion del achatamiento por la ecuacion:

$$b = a - a\,\alpha \tag{42}$$

Ahora, dada ademas de los valores de los elementos, la latitud jeográfica del lugar considerado se pide determinar la latitud jeocéntrica ϕ' i el radio $SC = \rho$ correspondiente al punto ϕ.

§ 13. *Tarea de deducir la latitud jeocéntrica de la jeográfica.*—Partiremos de la ecuacion de la elipse meridiana:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{43}$$

en que x son las abscisas e y las ordenadas; el ángulo ϕ es el que forma la normal a la elipse en el punto S con el eje de las X, i sabemos por el cálculo que la tanjente de ese ángulo es igual a la inversa de la derivada de y respecto de x tomada con signo contrario, es decir,

$$\operatorname{tg}\phi = -\frac{dx}{dy} \tag{44}$$

Pero de la ecuacion de la elipse se deduce:

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} = 0 \tag{45}$$

de donde

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x} \tag{46}$$

i por lo tanto,

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x} \tag{47}$$

Espresemos tambien ϕ' en funcion de x e y; del triángulo rectángulo SCE (fig. 12), se deduce:

$$\text{tg } \phi' = \frac{y}{x} \tag{48}$$

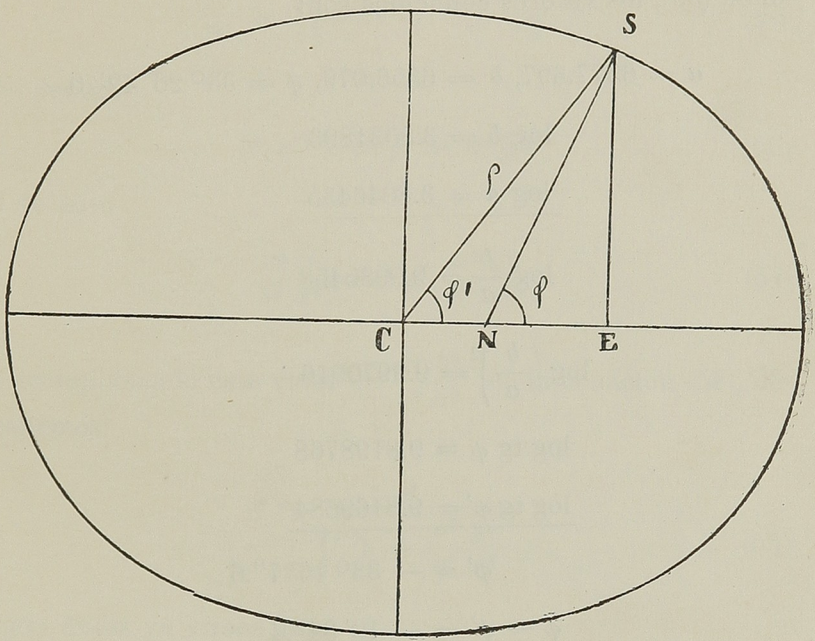

Figura 12.

Reemplazando en la ecuacion (47), $\frac{y}{x}$ por tg ϕ', obtenemos:

$$\text{tg } \phi = \frac{a^2}{b^2} \text{ tg } \phi' \tag{49}$$

i por lo tanto es la ecuacion buscada que facilita ϕ', una vez dada ϕ:

$$\text{tg } \phi' = \frac{b^2}{a^2} \text{ tg } \phi \tag{50}$$

Ejemplo.—Determinemos para Santiago el valor de ϕ', sabiendo que $\phi = -33^\circ\ 26'\ 42''.0$. Desde luego no es necesario considerar el signo de ϕ, puesto que ϕ i ϕ' siempre tendrán el mismo signo; entónces, consideraremos a ϕ positivo siempre i el valor obtenido para ϕ' lo afectaremos del signo que realmente tiene ϕ. Aplicaremos entónces la fórmula (50); los valores conocidos son:

$$a = 6377.397,\ b = 6356.079,\ \phi = 33^\circ\ 26'\ 42''.0$$

$$\log b = 3.8031893$$

$$\log a = 3.8046435$$

$$\log \frac{b}{a} = 9.9985458$$

$$\log \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 9.9970916$$

$$\log \operatorname{tg} \phi = 9.8198768$$

$$\log \operatorname{tg} \phi' = 9.8169684$$

$$\phi' = -33^\circ\ 16'\ 7''.6$$

$$\phi - \phi' = -10'\ 34''.4$$

Bajo el punto de vista de la paralaje esta diferencia entre ϕ i ϕ', es solo sensible para el caso de la luna; no para los demas planetas.

§ 14. *Tarea de determinar el radio vector de un punto de la superficie.*—Del triángulo *SCE* de la figura 12, se deduce:

$$\rho = \frac{x}{\cos \phi'} \qquad (51)$$

Para eliminar x de esta fórmula seguiremos el camino siguiente: podemos desde luego escribir:

$$x = \frac{ab\,x}{ab} = \frac{a}{\frac{a\,b}{b\,x}} = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{a\,b}{b\,x}\right)^2}} \qquad (52)$$

pero de la ecuacion

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (43)$$

se deduce

$$b^2\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,b^2 \qquad (53)$$

i de aquí

$$\frac{a_2\,b^2}{b^2\,x^2} = 1 + \frac{a^2\,y^2}{b^2\,x^2} \qquad (54)$$

i reemplazando este valor de $\frac{a^2\,b^2}{b^2\,x^2}$ en la ecuacion (52), obtenemos:

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a^2\,y^2}{b^2\,x^2}}} \qquad (55)$$

pero ántes ya vimos que

$$\text{tg}\,\varphi' = \frac{y}{x}, \qquad (48)$$

por lo tanto podemos escribir,

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}\,\text{tg}^2\,\phi'}} \qquad (56)$$

Ademas vimos que

$$\text{tg}\,\phi = \frac{a^2}{b^2}\,\text{tg}\,\phi'; \qquad (49)$$

BIBLIOTECA NACIONAL
SECCION CHILENA

luego nos queda,

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}\phi \operatorname{tg}\phi'}} \tag{57}$$

o bien reemplazando las tanjentes por sus valores en funcion del seno i coseno i haciendo la suma en la cantidad subradical, obtenemos:

$$x = \frac{a}{\sqrt{\dfrac{\cos\phi\cos\phi' + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\phi'}{\cos\phi\cos\phi'}}} = \frac{a}{\sqrt{\dfrac{\cos(\phi - \phi')}{\cos\phi\cos\phi'}}} \tag{58}$$

i reemplazando este valor en la espresion (51) que nos dá ρ, obtenemos:

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\dfrac{\cos(\phi - \phi')\cos\phi'}{\cos\phi}}} \tag{59}$$

o sea finalmente,

$$\rho = a\sqrt{\frac{\cos\phi}{\cos(\phi - \phi')\cos\phi'}} \tag{60}$$

que es la fórmula que buscábamos.

Ejemplo.— Calcular ρ para Santiago.—Los datos son entónces (véase páj. 34): $a = 6377.397$, $\phi = -33^\circ\ 26'\ 42.''0$,

$$\phi' = -33^\circ\ 16'\ 7.''6,\quad \phi - \phi' = -10'\ 34.''4$$

$$\log\cos\phi = 9.9213822$$

$$\log\cos\phi' = 9.9222615$$

$$\log\cos(\phi - \phi') = 9.9999980$$

$$\log\frac{\cos\phi}{\cos(\phi - \phi')\cos\phi'} = 9.9991227$$

$$\log \sqrt{\frac{\cos \phi}{\cos (\phi - \phi') \cos \phi'}} = 9.9995613$$

$$\log a = 3.8046435$$

$$\log \rho = 3.8042048$$

$$\rho = 6370.959 \text{ klm.}$$

§ 15. *Determinacion de* $\phi' - \phi$.—Hemos dado la fórmula para la determinacion directa de ϕ', fórmula bastante sencilla pero que tiene el inconveniente de necesitarse el uso de tablas de logaritmos de siete cifras para el cálculo, i ésto debido a que la diferencia entre ϕ' i ϕ es pequeña i por lo tanto en el cálculo logarítmico puede ser que sus valores lleguen a confundirse sino se usan tablas con un número suficiente de cifras. En casos como éste, es preferible determinar directamente la diferencia $\phi' - \phi$ i pasar de esta diferencia a la cantidad buscada, agregándole ϕ.

Hemos obtenido la fórmula:

$$\text{tg } \phi' = \frac{b^2}{a^2} \text{ tg } \phi \qquad (50)$$

en que b i a son cantidades poco diferentes i por lo tanto $\frac{b^2}{a^2}$ es parecido a la unidad i por consiguiente ϕ' i ϕ tam bien son parecidos; es éste el caso en que determinaremos $\phi' - \phi$, i la determinacion la haremos de modo que resulte una série.

§ 16. *Série ausiliar* $y - x$ *para la espresion* $\text{tg } y = n \text{ tg } x$.— Para ésto consideramos el caso jeneral

$$\text{tg } y = n \text{ tg } x \qquad (61)$$

en que n es una cantidad próximamente igual a la unidad. El método que seguiremos en la reduccion de esa série no

es un método directo; partiremos de otra funcion que desarrollaremos en série i despues veremos qué relaciones existen entre la funcion desarrollada i la funcion cuyo desarrollo necesitamos.

Partiremos, pues, del caso:

$$\text{tg } y = \frac{a \text{ sen } x}{1 - a \cos x} \tag{62}$$

i queremos determinar el valor de y por medio de una série en que entren las diferentes potencias de a, considerando a x como constante. Este es un caso que se presenta mui a menudo en la práctica i nosotros tuvimos ocasion de verlo en el curso del año último al tratar de la precesion de los equinoccios; en efecto, cuando tratamos de determinar el aumento de la ascension recta debido a ese fenómeno, obtuvimos la fórmula:

$$\text{tg } (a' - a) = \frac{p \text{ sen } a}{1 - p \cos a}, \tag{63}$$

que como se vé es completamente análoga a la fórmula arriba escrita.

Veamos pues cómo vamos a hacer el desarrollo en série de la ecuacion (62); desde luego, como lo dijimos, consideramos como variables independientes a y i a a i x como constante; por lo tanto, podemos determinar la derivada de y respecto de a; haciendo ésto obtenemos:

$$\frac{d(\text{tg } y)}{da} = \frac{(1 - a \cos x) \text{ sen } x + a \text{ sen } x \cos x}{(1 - a \cos x)^2} \tag{64}$$

o sea,

$$\sec^2 y \frac{dy}{da} = \frac{\text{sen } x}{(1 - a \cos x)^2} \tag{65}$$

pero como $\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y$, resulta que:

$$(1+\operatorname{tg}^2 y)\,\frac{dy}{da} = \frac{\operatorname{sen} x}{(1-a\cos x)^2} \qquad (66)$$

o bien,

$$\frac{dy}{da} = \frac{\operatorname{sen} x}{(1-a\cos x)^2\,(1+\operatorname{tg}^2 y)} \qquad (67)$$

Reemplazando en esta espresion tg y por su valor de la fórmula (62), resulta:

$$\frac{dy}{da} = \frac{\operatorname{sen} x}{(1-a\cos x)^2\left[1+\dfrac{a^2\operatorname{sen}^2 x)}{(1-a\cos x)^2}\right]} \qquad (68)$$

o sea,

$$\frac{dy}{da} = \frac{\operatorname{sen} x}{(1-a\cos x)^2 + a^2\operatorname{sen}^2 x} \qquad (69)$$

$$\frac{dy}{da} = \frac{\operatorname{sen} x}{1-2a\cos x + a^2\cos^2 x + a^2\operatorname{sen}^2 x} \qquad (70)$$

es decir,

$$\frac{dy}{da} = \frac{\operatorname{sen} x}{1-2a\cos x + a^2} \qquad (71)$$

Como se sabe, por un camino inverso, es decir, por medio de una integracion podemos pasar de la ecuacion (71) a la (62); por lo tanto, si logramos desarrollar en série la ecuacion (71) fácilmente obtenemos el desarrollo en série de la (62). Hagamos, pues, el desarrollo en série de (71); es decir, queremos obtener una ecuacion de la forma:

$$\frac{dy}{da} = N + Aa + Ba^2 + Ca^3 + Da^4 + \ldots\ldots \qquad (72)$$

bajo la condicion que los coeficientes A, B, C, D, etc., sean decrecientes. El método que aplicaremos para determinar N, A, B, etc. será el llamado de los «coeficientes indeterminados». Escribamos la ecuacion:

$$N + Aa + Ba^2 + Ca^3 + Da^4 + \ldots = \frac{\text{sen } x}{1 - 2\,a\cos x + a^2} \qquad (73)$$

o sea

$$(N + Aa + Ba^2 + Ca^3 + Da^4 + \ldots)(1 - 2\,a\cos x + a^2) = \text{sen } x \qquad (74)$$

Esta espresion debe ser una identidad, es decir, ella debe satisfacerse cualquiera que sean los valores de a. Una propiedad de las identidades es que si se ordenan en ámbos miembros los términos segun las potencias de la variable los coeficientes en los términos que corresponden a una misma potencia de la variable deben ser iguales; en otros términos, si tenemos la identidad

$$m + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 = m' + \alpha' z + \beta' z^2 + \gamma' z^3 \qquad (75)$$

debe verificarse que:

$$m = m';\ \alpha = \alpha';\ \beta = \beta';\ \gamma = \gamma' \qquad (76)$$

Esta propiedad aplicaremos en la determinacion de N, A, B, C, D, etc. de la espresion (74), que para mayor claridad la escribiremos en la forma:

$$(N + Aa + Ba^2 + Ca^3 + Da^4 + \ldots)(1 - 2\,a\cos x + a^2)$$

$$= \text{sen } x + 0\,a + 0\,a^2 + 0\,a^3 + \ldots \qquad (77)$$

Ejecutemos, entónces, en el primer miembro de esta espresion la multiplicacion indicada i reunamos los términos que contengan la misma potencia de a, i consideremos por

el momento solo hasta los términos que contienen la cuarta potencia de a; la multiplicacion nos dá:

$$N + Aa + Ba^2 + Ca^3 + Da^4 - 2\,a\,N\cos x - 2\,a^2 A\cos x$$
$$- 2\,a^3 B\cos x - 2\,a^4 C\cos x + Na^2 + Aa^3 + Ba^4$$
$$+ \ldots = \operatorname{sen} x + 0\,a + 0\,a^2 + 0\,a^3 + 0\,a^4 \ldots \qquad (78)$$

i reuniendo ahora los términos segun las potencias de a:

$$N + (A - 2\,N\cos x)\,a + (B - 2\,A\cos x + N)\,a^2$$
$$+ (C - 2\,B\cos x + A)\,a^3 + (D - 2\,C\cos x + B)\,a^4$$
$$+ \ldots = \operatorname{sen} x + 0\,a + 0\,a^2 + 0\,a^3 + 0\,a^4 \ldots \qquad (79)$$

De la propiedad que anunciamos mas arriba resulta que deben verificarse las siguientes igualdades:

$$\left.\begin{aligned} N &= \operatorname{sen} x \\ A - 2\,N\cos x &= 0 \\ B - 2\,A\cos x + N &= 0 \\ C - 2\,B\cos x + A &= 0 \\ D - 2\,C\cos x + B &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

i obtenemos así un sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, sistema que vamos a resolver.

Desde luego N se encuentra ya despejada i su valor es

$$N = \operatorname{sen} x \qquad (81)$$

Reemplazando este valor de N en la segunda ecuacion del sistema (80), obtenemos:

$$A - 2\operatorname{sen} x\cos x = 0 \qquad (82)$$

pero

$$2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x \tag{83}$$

por lo tanto

$$A = \operatorname{sen} 2x \tag{84}$$

Reemplazando ahora N i A en la tercera ecuacion (80) nos queda:

$$B - 2 \operatorname{sen} 2x \cos x + \operatorname{sen} x = 0 \tag{85}$$

o sea,

$$\left.\begin{aligned} B &= 2 \operatorname{sen} 2x \cos x - \operatorname{sen} x \\ B &= 4 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen} x \\ B &= \operatorname{sen} x \,(4 \cos^2 x - 1) \\ B &= \operatorname{sen} x \,[3 \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)] \\ B &= \operatorname{sen} x \,(3 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \\ B &= 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

i recordando las fórmulas de la goniometría, resulta que:

$$B = \operatorname{sen} 3x \tag{87}$$

Haciendo substituciones análogas a las anteriores, resulta para C:

$$C - 2 \operatorname{sen} 3x \cos x + \operatorname{sen} 2x = 0 \tag{88}$$

de donde,

$$C = 2 \operatorname{sen} 3x \cos x - \operatorname{sen} 2x \tag{89}$$

pero

$$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} (2x + x) = \operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x \tag{90}$$

luego

$$C = 2 \operatorname{sen} 2x \cos^2 x + 2 \cos 2x \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} 2x \qquad (91)$$

pero

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x \quad \text{i} \quad 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x \qquad (92)$$

por lo tanto

$$\left.\begin{aligned} C &= \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2x \cos 2x + \operatorname{sen} 2x \cos 2x - \operatorname{sen} 2x \\ C &= 2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x \end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

lo que dá finalmente,

$$C = \operatorname{sen} 4x \qquad (94)$$

Por fin, para el coeficiente D, obtenemos:

$$D = 2 C \cos x - B \qquad (95)$$

$$D = 2 \operatorname{sen} 4x \cos x - \operatorname{sen} 3x \qquad (96)$$

pero,

$$\operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen} 3x \cos x + \cos 3x \operatorname{sen} x \qquad (97)$$

$$D = 2 \operatorname{sen} 3x \cos^2 x + 2 \cos 3x \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} 3x \qquad (98)$$

i reemplazando $2 \cos^2 x$ i $2 \operatorname{sen} x \cos x$ por los valores (92) ya vistos al hacer la determinacion de C, nos queda:

$$\left.\begin{aligned} D &= \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 3x \cos 2x + \cos 3x \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 3x \\ D &= \operatorname{sen} 3x \cos 2x + \cos 3x \operatorname{sen} 2x \end{aligned}\right\} \qquad (99)$$

i en fin:

$$D = \operatorname{sen} 5x \qquad (100)$$

Como se vé, hemos deducido para los coeficientes N, A, B, C i D los valores sen x, sen $2x$, sen $3x$, sen $4x$ i

sen 5 x respectivamente, valores que bastan para deducir la lei que ellos siguen. Reemplazando estos valores en la fórmula (72), obtenemos:

$$\frac{dy}{da} = \text{sen } x + a \text{ sen } 2x + a^2 \text{sen } 3x + a^3 \text{sen } 4x + \ldots . \quad (101)$$

espresion que nos dá el desarrollo en série de la derivada de la funcion cuyo desarrollo en série realmente buscamos. Esta espresion podemos escribirla en la forma:

$$dy = da \text{ sen } x + a\, da \text{ sen } 2x + a^2 da \text{ sen } 3x + a^3 da \text{ sen } 4x + \ldots \quad (102)$$

Haciendo la integracion en ámbos miembros nos queda:

$$y = a \text{ sen } x + \frac{1}{2} a^2 \text{ sen } 2x + \frac{1}{3} a^3 \text{ sen } 3x$$

$$+ \frac{1}{4} a^4 \text{ sen } 4x + \frac{1}{5} a^5 \text{ sen } 5x + \ldots . \quad (103)$$

De cada integracion sabemos que resulta una constante i si en el caso actual no la tomamos en cuenta es porque ella es igual a cero. En efecto podemos escribir.

$$y = a \text{ sen } x + \ldots\ldots + C^{te} \quad (104)$$

Si suponemos $a = 0$, resulta $y = C^{te}$; pero para el mismo valor de a se obtiene de la ecuacion (62) $y = 0$, por lo tanto, $y = C^{te} = 0$, lo que nos comprueba lo aseverado.

La série (103) reemplaza, pues, exactamente a la ecuacion (62) i por medio de ella se puede obtener la exactitud que se quiere considerando un número conveniente de términos; pero la série no sirve en caso que a sea mayor que la unidad, pues, entónces los términos no disminuyen. Los

términos disminuirán mui rápidamente si a es mui pequeño i por el contrario, esa disminucion será pequeña si a se aproxima a la unidad. Si a es negativo los signos en la série (103) serán alternativamente positivos i negativos segun que n sea par o impar. Pero ésto no es rigurosamente exacto, pues, los signos de los términos dependen tambien del valor del ángulo $n\,x$, puesto que este ángulo puede estar en cualquier cuadrante i por lo tanto su seno cambia de signo.

Hai que notar que los términos de la série (103) están todos espresados en arco i que si se quiere conocer y en ángulo habrá que dividir cada uno de los términos por arc 1'', arc 1' o arc 1°, segun que se quiera espresar todo en segundos, minutos o grados.

Tratemos ahora de trasformar la fórmula:

$$\text{tg } y = \frac{a \text{ sen } x}{1 - a \cos x} \tag{62}$$

de modo que se obtenga una análoga a la

$$\text{tg } \phi' = \frac{b^2}{a^2} \text{ tg } \phi \,. \tag{50}$$

Desde luego consideremos la fórmula:

$$\text{tg } y = n \text{ tg } x \tag{61}$$

Determinemos la diferencia $y - x$; sabemos que:

$$\text{tg } (y - x) = \frac{\text{tg } y - \text{tg } x}{1 + \text{tg } y \text{ tg } x} \tag{105}$$

o lo que es lo mismo:

$$\text{tg } (y - x) = \frac{n \text{ tg } x - \text{tg } x}{1 + n \text{ tg}^2 x} = \frac{(n-1) \text{ tg } x}{1 + n \text{ tg}^2 x} \tag{106}$$

$$\text{tg } (y - x) = \frac{(n-1) \text{ sen } x \cos x}{\cos^2 x + n \text{ sen}^2 x} \tag{107}$$

Pero sabemos que:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x \cos x &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ \operatorname{sen}^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{aligned}\right\} \qquad (108)$$

Haciendo estos reemplazos en la fórmula (107) obtenemos:

$$\operatorname{tg}(y - x) = \frac{\frac{1}{2}(n-1)\operatorname{sen} 2x}{\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2} n (1 - \cos 2x)} \qquad (109)$$

o sea,

$$\operatorname{tg}(y - x) = \frac{(n-1)\operatorname{sen} 2x}{1 + n + (1-n)\cos 2x} \qquad (110)$$

i dividiendo numerador i denominador por $n + 1$,

$$\operatorname{tg}(y - x) = \frac{\frac{n-1}{n+1}\operatorname{sen} 2x}{1 - \frac{n}{n+1}\cos 2x} \qquad (111)$$

Si ahora comparamos esta fórmula con

$$\operatorname{tg} y = \frac{a \operatorname{sen} x}{1 - a \cos x} \qquad (62)$$

vemos que ellas son de la misma forma i que se puede pasar fácilmente de la última a la anterior solo con cambiar y por $y - x$, a por $\frac{n-1}{n+1}$ i x por $2x$. Por consiguiente, si necesitamos el desarrollo en série de $y - x$, bastará hacer esos mismos reemplazos en el desarrollo en série de y; es decir, para y obtuvimos:

$$y = a \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} a^3 \operatorname{sen} 3x + \ldots . \qquad (103)$$

para $y - x$ obtendremos entónces:

$$y - x = \frac{n-1}{n+1} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 \operatorname{sen} 6x + \ldots \tag{112}$$

§ 17. *Aplicacion de la fórmula del § 16 para determinar* $\phi' - \phi$.—Veamos ahora lo que sucede con el desarrollo de $\phi' - \phi$, que es el que verdaderamente necesitamos. Conocemos ya la fórmula;

$$\operatorname{tg} \phi' = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \phi \tag{50}$$

i ésta es completamente análoga a la fórmula (61), solo que en vez de $y, n,$ i x tenemos ahora respectivamente ϕ', $\frac{b^2}{a^2}$ i ϕ; por lo tanto el desarrollo en série de $\phi' - \phi$ es tambien análogo al de $y - x$, siempre que se reemplacen n por $\frac{b^2}{a^2}$ i x por ϕ. Determinemos préviamente los coeficientes de los diversos términos de la série:

$$\frac{\frac{b^2}{a^2} - 1}{\frac{b^2}{a^2} + 1} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \tag{113}$$

Los demas coeficientes serán como se vé las potencias sucesivas de éste. Para ser mas racionales escribámoslo en la forma:

$$- \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

puesto que sabemos que a es mayor que b. Resulta pues la série:

$$\phi' - \phi = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \operatorname{sen} 2\phi + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 - b_2}{a^2 + b^2}\right)^2 \operatorname{sen} 4\phi$$

$$- \frac{1}{3}\left(\frac{a_2 - b_2}{a^2 + b^2}\right)^3 \operatorname{sen} 6\phi + \ldots\ldots \quad (114)$$

Para facilitar el cálculo de los coeficientes introduzcamos la nueva constante:

$$\gamma = \frac{a - b}{a + b} \quad (115)$$

De aquí se deduce:

$$1 + \gamma^2 = 1 + \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{2(a^2+b^2)}{(a+b)^2} \quad (116)$$

Ahora,

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{a^2 + b^2} = \frac{(a-b)(a+b)^2}{(a+b)(a^2+b^2)} \quad (117)$$

pero como se deduce de la fórmula anterior:

$$\frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2} = \frac{2}{1 + \gamma^2} \quad (118)$$

resulta

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2\gamma}{1 + \gamma^2} \quad (119)$$

Por lo tanto la série se convierte en:

$$\phi' - \phi = -\frac{2\gamma}{1+\gamma^2} \operatorname{sen} 2\phi + \frac{1}{2}\frac{4\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2} \operatorname{sen} 4\phi$$

$$- \frac{1}{3}\frac{8\gamma^3}{(1+\gamma^2)^3} \operatorname{sen} 6\phi + \ldots\ldots (120)$$

i ésta es la série que buscábamos. La diferencia $\phi' - \phi$ siempre la determinaremos en ángulo i por lo tanto debemos dividir cada uno de los términos de la série por sen 1'' para obtener entónces $\phi' - \phi$ en segundos; es decir, la série se convierte en:

$$(\phi' - \phi)'' = -\frac{2\gamma}{(1+\gamma^2)\operatorname{sen} 1''}\operatorname{sen} 2\phi + \frac{1}{2}\frac{4\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2 \operatorname{sen} 1''}\operatorname{sen} 4\phi$$

$$-\frac{1}{3}\frac{8\gamma^3}{(1+\gamma^2)^3 \operatorname{sen} 1''}\operatorname{sen} 6\phi + \ldots . \qquad (121)$$

§ 18. *Cálculo numérico de los coeficientes. 1.er coeficiente.* — $\frac{2\gamma}{(1+\gamma^2)\operatorname{sen} 1''}$. —Sabemos desde luego que:

$$\gamma = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\begin{aligned}
a &= 6377.397 \text{ klm.} \\
b &= 6356.079 \text{ »} \\
\hline
a - b &= 21.318 \text{ »} \\
a + b &= 12733.476 \text{ »} \\
\log(a-b) &= 1.3287465 \\
\log(a+b) &= 4.1049469 \\
\hline
\log \gamma &= 7.2237996 - 10 \\
\log 2 &= 0.3010300 \\
\hline
\log 2\gamma &= 7.5248296 \\
\log \gamma^2 &= 4.4475992 - 10 \\
\gamma^2 &= 0.000002803 \\
1 + \gamma^2 &= 1.000002803 \\
\log(1+\gamma^2) &= 0.0000012 \\
\hline
\log \frac{2\gamma}{1+\gamma} &= 7.5248284 - 10 \\
\log \operatorname{sen} 1'' &= 4.6855749 - 10 \\
\hline
\log - \frac{2\gamma}{(1+\gamma^2)\operatorname{sen} 1''} &= 2.8392535_n \\
- \frac{2\gamma}{(1+\gamma^2)\operatorname{sen} 1''} &= -690.''643
\end{aligned}$$

Este es pues el coeficiente del primer término de la série.

2.º *coeficiente.* — $\frac{1}{2}\ \frac{4\,\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2\ \text{sen}\ 1''}$.—Basta que usemos para el cálculo de éste logaritmos de cinco cifras. Obtuvimos ya:

$$\log \frac{2\,\gamma}{1+\gamma^2} = 7.52483 - 10$$

por lo tanto

$$\log \frac{4\,\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2} = 5.04966 - 10$$

$$\log 2 = 0.30103$$

$$\log \text{sen}\ 1'' = 4.68557 - 10$$

$$\log \frac{4\,\gamma^2}{2\,(1+\gamma^2)^2\ \text{sen}\ 1''} = 0.06306$$

$$\frac{4\,\gamma^2}{2\,(1+\gamma^2)^2\ \text{sen}\ 1''} = 1.''156$$

3.er *coeficiente.*— $\frac{1}{3}\ \frac{8\,\gamma^3}{(1+\gamma^2)^3\ \text{sen}\ 1''}$.—Hagamos el cálculo con cuatro cifras:

$$\log \frac{8\,\gamma^3}{(1+\gamma^2)^3} = 2.5745 - 10$$

$$\log 3 = 0.4771$$

$$\log \text{sen}\ 1'' = 4.6856 - 10$$

$$\log \frac{8\,\gamma^3}{3\,(1+\gamma^2)^3\ \text{sen}\ 1''} = 7.4118 - 10$$

$$\frac{8\,\gamma^3}{3\,(1+\gamma^2)^3\ \text{sen}\ 1''} = 0.''0026$$

En los cálculos astronómicos jamas se calcula mas allá del centésimo de segundo de arco i por lo tanto este último término es perfectamente despreciable. Ese término podria ser tomado en cuenta en los cálculos jeodésicos cuando éstos se llevan hasta el milésimo de segundo.

Se nota, pues, la rapidez con que van disminuyendo los coeficientes de los diversos términos i se comprende que entónces el cuarto término será completamente despreciable en cualquier clase de cálculo, aun jeodésico.

Nosotros que, como lo dijimos solo calculamos hasta el centésimo del segundo de arco, consideraremos despreciable ya el tercer término i la fórmula final será entónces:

$$\phi' - \phi = -690.''643 \text{ sen } 2\,\phi + 1.''156 \text{ sen } 4\,\phi$$

o bien,

$$\phi' - \phi = -[2.83925] \text{ sen } 2\,\phi + [0.06306] \text{ sen } 4\,\phi$$

representando las cantidades entre paréntesis no el coeficiente mismo sino que su logaritmo.

§ 19. *Ejemplo para calcular la diferencia de latitud jeocéntrica ménos jeográfica.*—Calculemos para Santiago la diferencia entre ámbas latitudes. Tenemos en este caso:

$$\phi = -33^{\circ}\ 26.'70$$

Aplicaremos la fórmula (120):

$2\,\phi = -66^{\circ}\ 53.'40$	$4\,\phi = -133^{\circ}\ 46.'80$
log sen $2\,\phi$ = 9.96367 n	log sen $4\,\phi$ = 9.85854 n
2.83925 n	0.06306
2.80292	9.92160 n
1.er térm. = + 635.''21	2.º térm. = — 0.''83

Por lo tanto obtenemos:

$$\phi' - \phi = 635.''21 - 0.''83 = 634.''38 = 10'\ 34.''4$$

pero $$\phi = -\ 33^{o}\ 26'\ 42.''0$$

luego $$\phi' = -\ 33^{o}\ 16'\ 7.''6$$

valor idéntico al que ya obtuvimos ántes aplicando la fórmula cerrada.

Antes de concluir con ésto debemos agregar que no es necesario hacer esta clase de cálculos en cada caso, pues, existen muchas tablas que dan para una série de valores de ϕ, espaciados a intervalos convenientes, ya los valores de $\phi' - \phi$ o de ϕ' en el acto. Entónces, por medio de estas tablas, se puede obtener fácilmente por una sencilla interpolacion el valor de la latitud jeocéntrica ϕ' correspondiente a una latitud jeográfica cualquiera ϕ.

§ 20. *Cálculo de* $\log \rho - \log a$.—La fórmula completa que nos dá el valor de ρ es:

$$\rho = a\sqrt{\frac{\cos \phi}{\cos (\phi - \phi')\cos \phi'}} \qquad (60)$$

pero como ρ i a son cantidades poco diferentes i por lo tanto tambien $\log \rho$ i $\log a$ son parecidos, vamos a determinar $\log \rho - \log a$ por medio de una série, que nos permitirá calcular con ménos cifras.

§ 21. *Série ausiliar que reemplazca* $\log \sqrt{1 - 2a\cos x + a^2}$. —Procedamos como en el caso del cálculo de $\phi' - \phi$, desarrollando en série una fórmula que a primera vista no tiene relacion alguna con la que necesitamos, pero despues veremos como se puede pasar de la una a la otra.

La série ausiliar que desarrollamos en este caso es:

$$A = \sqrt{1 - 2\,a\cos x + a^2} \qquad (122)$$

cuyo logaritmo lo espresaremos en funcion de las potencias sucesivas de a, es decir, obtendremos:

$$\log A = C + C_1\,a + C_2\,a^2 + C_3\,a^3 + C_4\,a^4 + \ldots\ldots \qquad (123)$$

significando C una constante i C_1 .... C_4 los coeficientes respectivos de los términos de la série.

Saldremos de la fórmula:

$$\frac{a\cos x - a^2}{1 - 2\,a\cos x + a^2} = N_1 a + N_2 a^2 + N_3 a^3 + N_4 a^4 + \ldots. \qquad (124)$$

N_1, N_2, N_3, N_4, etc., son valores que vamos a determinar. Podemos escribir:

$$a\cos x - a^2 = (1 - 2\,a\cos x + a^2)(N_1 a + N_2 a^2 + N_3 a^3 + N_4 a^4 + \ldots.) \qquad (125)$$

Esta espresion es una identidad, i para determinar N_1, N_2, N_3..... aprovecharemos la propiedad de las identidades de que los términos que contienen la misma potencia de la variable en ámbos miembros deben satisfacerse mutuamente.

Desde luego, no existe en ninguno de los dos miembros término independiente de a. Procediendo de un modo enteramente análogo al empleado en la determinacion de los coeficientes indeterminados de la série (74) del acápite 15,

obtenemos los de la série que ahora consideramos, es decir:

$$\left.\begin{aligned} a\ N_1 &= a\cos x \\ \text{por eso } N_1 &= \cos x \end{aligned}\right\} \qquad (126)$$

$$\left.\begin{aligned} -\ a^2 &= -\ 2\ N_1\ a^2\cos x + N_2\ a^2 \\ -\ 1 &= -\ 2\ N_1\cos x + N_2 \\ N_2 &= -\ 1 + 2\cos^2 x = \cos 2\ x \end{aligned}\right\} \qquad (127)$$

$$\left.\begin{aligned} 0\ a^3 &= N_1\ a^3 - 2\ N_2\ a^3\cos x + N_3\ a^3 \\ 0 &= \cos x - 2\cos 2\ x\cos x + N_3 \\ N_3 &= 2\cos 2\ x\cos x - \cos x \\ N_3 &= 2\ (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cos x - \cos x \end{aligned}\right\} \qquad (128)$$

Haciendo la multiplicacion indicada i ademas multiplicando el último término por $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$, que es igual a la unidad, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} N_3 &= 2\cos^3 x - 2\cos x\operatorname{sen}^2 x - \cos^3 x - \cos x\operatorname{sen}^2 x \\ N_3 &= \cos^3 x - 3\cos x\operatorname{sen}^2 x \end{aligned}\right\} \qquad (129)$$

o sea

$$N_3 = \cos 3\ x \qquad (130)$$

Ahora

$$\left.\begin{aligned} 0 &= N_4\ a^4 - 2\ N_3\ a^4\cos x + N_2\ a^4 \\ N_4 &= 2\cos 3\ x\cos x - \cos 2\ x \end{aligned}\right\} \qquad (131)$$

pero

$$\cos 3\ x = \cos(2\ x + x) = \cos 2\ x\cos x - \operatorname{sen} 2\ x\operatorname{sen} x \qquad (132)$$

luego

$$N_4 = 2\cos 2x\cos^2 x - 2\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x\cos x - \cos 2x \quad (133)$$

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \quad \text{i} \quad 2\operatorname{sen} x\cos x = \operatorname{sen} 2x \quad (134)$$

$$N_4 = \cos 2x + \cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x - \cos 2x \quad (135)$$

$$N_4 = \cos 4x \quad (136)$$

i así sucesivamente $N_5 = \cos 5x$, $N_6 = \cos 6x$, etc. Reemplazando estos valores en la fórmula (124), obtenemos:

$$\frac{a\cos x - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2} = a\cos x + a^2\cos 2x + a^3\cos 3x + \ldots\ldots \quad (137)$$

Multipliquemos ámbos miembros de esta espresion por $\frac{da}{a}$; nos queda:

$$\frac{(\cos x - a)\,da}{1 - 2a\cos x + a^2} = da\cos x + a\,da\cos 2x + a^2\,da\cos 3x + \ldots \quad (138)$$

de donde se deduce:

$$\int \frac{\cos x - a}{1 - 2a\cos x + a^2}\,da = a\cos x + \frac{1}{2}a^2\cos 2x + \frac{1}{3}a^3\cos 3x + \ldots \quad (139)$$

Ahora para resolver la integral del primer miembro recordemos que la integral de una fraccion en que el numerador es la derivada del denominador, es el logaritmo natural (o neperiano) del denominador. En el caso actual la derivada del denominador es $-2\cos x + 2a = -2(\cos x - a)$, i vemos que esta cantidad sólo difiere del numerador en que tiene como factor a -2; pero fácilmente llegamos a hacer igual al numerador á la derivada del denominador si ponemos.

$$\int \frac{\cos x - a}{1 - 2\,a\cos x + a^2} da = \int \frac{-2(\cos x - a)}{-2(1 - 2\,a\cos x + a^2)} da$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2(\cos x - a)}{1 - 2\,a\cos x + a^2} da = -\frac{1}{2} l(1 - 2\,a\cos x + a^2) \quad (140)$$

o sea en vista de (139):

$$-\frac{1}{2} l(1 - 2\,a\cos x + a^2) = a\cos x + \frac{1}{2} a_2 \cos 2x + \frac{1}{3} a_3 \cos 3x + .. \quad (141)$$

Ahora bien, el valor que nosotros queríamos desarrollar en série fué:

$$A = \sqrt{1 - 2\,a\cos x + a^2} \quad (122)$$

pero de aquí se deduce:

$$l\,A = \frac{1}{2} l\,(1 - 2\,a\cos x + a^2) \quad (142)$$

i por lo tanto:

$$l\,A = -a\cos x - \frac{1}{2} a^2 \cos 2x - \frac{1}{3} a^3 \cos 3x - \frac{1}{4} a^4 \cos 4x - \ldots \quad (143)$$

Siempre que a sea pequeño es preferible calcular A por medio de esta série i no por la fórmula cerrada.

§ 22. *Série ausiliar que reemplaza* $\log \sqrt{1 + 2\,a\cos\xi + a^2}$. —Hagamos ahora:

$$x = 180^o - \xi \quad (144)$$

Entónces las dos fórmulas (122) i (143) se convierten en:

$$A = \sqrt{1 + 2\,a\cos\xi + a^2} \quad (145)$$

$$1\,A = a\cos\hat{\xi} - \frac{1}{2}a^2\cos 2\,\hat{\xi} + \frac{1}{3}a^3\cos 3\,\hat{\xi} - \frac{1}{4}a^4\cos 4\,\hat{\xi} + \ldots . \tag{146}$$

i estas dos fórmulas serán las que vamos a aplicar en el caso de la determinacion de $\log \rho - \log a$.

En las fórmulas que hemos obtenido significamos por l el logaritmo neperiano. Como sabemos, estos logaritmos no se emplean en la práctica; los que se emplean son los logaritmos decimales (o de Briggs). La base del sistema de logaritmos naturales es:

$$e = 2.71828182845 \ldots\ldots$$

En el sistema de logaritmos decimales la base es 10. De la definicion de logaritmo de un número, i si nos fijamos en que la base en el sistema natural es menor que en el decimal, resulta que el logaritmo de un número en el último sistema es menor que en el primero. En otros términos, si n es un número cualquiera resulta que:

$$1\,n = \frac{\log n}{M} \tag{147}$$

$$\log n = M\,1\,n \tag{148}$$

siendo M una cantidad menor que la unidad. M es una constante para dos sistemas de logaritmos i se llama módulo; para el caso de logaritmos naturales i decimales,

$$M = 0.43429448\ldots . \quad (=\log e)$$

Por lo tanto, si el valor de A de la raiz (145) lo queremos determinar por medio de los logaritmos decimales, debemos escribir:

$$\log A = M\left(a\cos\hat{\xi} - \frac{1}{2}a^2\cos 2\,\hat{\xi} + \frac{1}{3}a^3\cos 3\,\hat{\xi} - \ldots\ldots\right) \tag{149}$$

§ 23. *Aplicacion de la série del § 22 para determinar* $\log \frac{\rho}{a}$. La fórmula que nos dá el valor de ρ es:

$$\rho = a \sqrt{\frac{\cos \phi}{\cos (\phi' - \phi) \cos \phi'}} \tag{60}$$

Trasformaremos esta fórmula de modo que obtengamos una análoga a la (145). Desde luego, para mayor claridad escribamos:

$$\left.\begin{aligned} \rho^2 &= a^2 \frac{\cos \phi}{\cos (\phi' - \phi) \cos \phi'} \\ &= \frac{a^2}{\frac{\cos \phi'}{\cos \phi} (\cos \phi' \cos \phi + \operatorname{sen} \phi' \operatorname{sen} \phi)} \\ &= \frac{a^2}{\cos^2 \phi' (1 + \operatorname{tg} \phi' \operatorname{tg} \phi)} \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

Pero ya antes al relacionar los ángulos ϕ' i ϕ encontramos la fórmula:

$$\operatorname{tg} \phi' = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \phi \tag{50}$$

Reemplazando este valor de tg ϕ' en la última ecuacion, obtenemos:

$$\rho_1^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \phi' \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 \phi\right)} \tag{151}$$

Como suponemos de antemano que la latitud jeocéntrica no es un dato del problema debemos eliminar del segundo miembro $\cos^2 \phi'$; para lograrlo, escribamos:

$$\sec^2 \phi' = \frac{1}{\cos^2 \phi'} = 1 + \operatorname{tg}^2 \phi' \tag{152}$$

o sea,

$$\frac{1}{\cos^2 \phi'} = 1 + \frac{b^4}{a^4} \operatorname{tg}^2 \phi = \frac{a^4 + b^4 \operatorname{tg}^2 \phi}{a^4} \qquad (153)$$

i por lo tanto:

$$\rho^2 = \frac{a^2 (a^4 + b^4 \operatorname{tg}^2 \phi)}{a^4 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 \phi \right)} = \frac{a^4 + b^4 \operatorname{tg}^2 \phi}{a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 \phi \right)} \qquad (154)$$

Si multiplicamos numerador i denominador de la fraccion por $\cos^2 \phi$, nos queda:

$$\rho^2 = \frac{a^4 \cos^2 \phi + b^4 \operatorname{sen}^2 \phi}{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \operatorname{sen}^2 \phi} \qquad (155)$$

Hagamos entrar en esta fórmula no el ángulo ϕ síno que el 2 ϕ; para hacer la trasformacion recordemos las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \phi &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2 \phi) \\ \cos^2 \varphi &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2 \phi) \end{aligned}\right\} \qquad (156)$$

Reemplazando estos valores obtenemos:

$$\rho^2 = \frac{\frac{1}{2} a^4 (1 + \cos 2 \phi) + \frac{1}{2} b^4 (1 - \cos 2 \phi)}{\frac{1}{2} a^2 (1 + \cos 2 \phi) + \frac{1}{2} b^2 (1 - \cos 2 \phi)}$$

$$= \frac{a^4 + b^4 + \cos 2 \phi (a^4 - b^4)}{a^2 + b^2 + \cos 2 \phi (a^2 - b^2)} \qquad (157)$$

Pero sabemos que:

$$\left.\begin{aligned} a^4 + b^4 &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)^2 \\ a^4 - b^4 &= (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \end{aligned}\right\} \quad (158)$$

i lo mismo para $a^2 + b^2$ i $a^2 - b^2$; por consiguiente:

$$\rho^2 = \frac{\frac{1}{2}(a^2+b^2)^2 + \frac{1}{2}(a^2-b^2)^2 + (a^2+b^2)(a^2-b^2)\cos 2\phi}{\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2 + (a+b)(a-b)\cos 2\phi} \quad (159)$$

o bien,

$$\rho^2 = \frac{(a^2+b^2)^2 + (a^2-b^2)^2 + 2(a^2+b^2)(a^2-b^2)\cos 2\phi}{(a+b)^2 + (a-b)^2 + 2(a+b)(a-b)\cos 2\phi} \quad (160)$$

Si sacamos a $(a^2 + b^2)^2$ como factor comun en el numerador i a $(a+b)^2$ en el denominador, nos queda:

$$\rho^2 = \frac{(a^2+b^2)^2\left[1 + \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + 2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2\phi\right]}{(a+b)^2\left[1 + \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} + 2\frac{a-b}{a+b}\cos 2\phi\right]} \quad (161)$$

i estrayendo la raiz cuadrada en ámbos miembros de esta espresion, obtenemos:

$$\rho = \frac{a^2+b^2}{a+b}\sqrt{\frac{1 + 2\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2\phi + \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2}{1 + 2\frac{a-b}{a+b}\cos 2\phi + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}} \quad (162)$$

Notamos que las dos raices son de la misma forma i ademas completamente análogas a la fórmula (145):

$$A = \sqrt{1 + 2\,a\cos\xi + a^2}$$

Se vé que para obtener la completa identidad de las raices ya nombradas con la mas arriba escrita basta solo reemplazar el ángulo ξ por 2ϕ i a por $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ i por $\frac{a - b}{a + b}$ respectivamente en el numerador i denominador. Ahora bien, encontramos una série segun las potencias de a que nos dió $\log A$; por lo tanto del mismo modo podemos espresar las raices que figuran en la ecuacion (162). En efecto, podemos escribir:

$$\log\rho = \log\frac{a^2+b^2}{a+b} + \log\sqrt{1 + 2\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\cos 2\phi + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2}$$

$$- \log\sqrt{1 + 2\frac{a - b}{a + b}\cos 2\phi + \left(\frac{a - b}{a + b}\right)^2} \qquad (163)$$

i en vista de la série (149) resulta:

$$\log\rho = \log\frac{a^2+b^2}{a+b} + M\left\{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2\phi - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\cos 4\phi + \ldots.\right\}$$

$$- M\left\{\frac{a-b}{a+b}\cos 2\phi - \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\cos 4\phi + \ldots.\right\} \qquad (164)$$

i obtenemos así el desarrollo en série de $\log\rho$. Para simplificar el cálculo de los coeficientes introduzcamos, como en el caso de la série (114) que nos dió $\phi' - \phi$, la constante:

$$\gamma = \frac{a-b}{a+b} \tag{115}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1+\gamma^2}{1+\gamma} &= \frac{1+\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}}{1+\dfrac{a-b}{a+b}} \\ &= \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a+b)^2} \times \frac{a+b}{a+b+a-b} \\ &= \frac{2\,(a^2+b^2)}{2\,a\,(a+b)} \end{aligned}\right\} \tag{165}$$

i por lo tanto,

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} = a\,\frac{1+\gamma^2}{1+\gamma} \tag{166}$$

Finalmente, el cálculo de $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ ya lo hemos hecho en el desarrollo de $\phi' - \phi$ i no tenemos para que repetirlo aquí; basta sólo que recordemos que su valor es:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \frac{2\,\gamma}{1+\gamma^2} \tag{119}$$

Reemplazando, pues, los valores (115), (165) i (119) en la série (164) obtenemos:

$$\log \rho = \log a\frac{1+\gamma^2}{1+\gamma} + M\left\{\frac{2\,\gamma}{1+\gamma^2}\cos 2\phi - \frac{1}{2}\frac{4\,\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2}\cos 4\phi + \ldots.\right\}$$
$$- M\left\{\gamma\cos 2\,\phi - \frac{1}{2}\,\gamma^2\cos 4\,\phi + \ldots..\right\} \tag{167}$$

o bien,

$$\log \rho = \log a + \log \frac{1+\gamma^2}{1+\gamma} + M\left\{ \frac{2\gamma}{1+\gamma^2} - \gamma \right\} \cos 2\phi$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{4\gamma^2}{(1+\gamma^2)^2} - \gamma^2 \right) \cos 4\phi + \ldots . \Big\} \quad (168)$$

Pasando log a al primer miembro, i recordando que la diferencia de dos logaritmos es el logaritmo del cuociente, resulta:

$$\log \frac{\rho}{a} = \log \frac{1+\gamma^2}{1+\gamma} + M\left\{ \left(\frac{2\gamma}{1+\gamma^2} - \gamma \right) \right\} \cos 2\phi$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{4\gamma^2}{1+\gamma^2)^2} - \gamma^2 \right) \cos 4\phi + \ldots \Big\} \quad (169)$$

Esta fórmula que es la definitiva nos dá la razon del radio de un punto cualquiera al radio ecuatorial, es decir, nos dá ρ en unidades de a, i esta es una cantidad que se determina con mas frecuencia que el valor mismo de ρ. Por otra parte, se comprende que si se conoce $\frac{\rho}{a}$ fácilmente se puede obtener ρ en cualquiera otra unidad si se multiplica esa razon por el correspondiente valor de a.

§ 24. *Cálculo numérico de los coeficientes.*—Ya hemos determinado anteriormente (véase páj. 49) el valor de γ, donde encontramos para él:

$$\log \gamma = 7.2237996$$

$$\gamma = 0.0016742$$

$$1 + \gamma = 1.0016742$$

Calculemos ahora el primer término de la fórmula (169),

es decir, vamos a determinar $\log \frac{1+\gamma^2}{1+\gamma}$. Hagamos el cálculo con logaritmos de siete cifras:

$$\log \gamma = 7.2237996$$
$$\log \gamma^2 = 4.4475992$$
$$\gamma^2 = 0.00000280285$$
$$1 + \gamma^2 = 1.0000028$$
$$\log (1 + \gamma^2) = 0.0000012$$
$$\log (1 + \gamma) = 0.0007265$$

luego,

$$\log \frac{1 + \gamma^2}{1 + \gamma} = 9.9992747$$

Calculemos ahora los coeficientes de los diversos cosenos.

1.º— $M\left(\frac{2\gamma}{1 + \gamma^2} - \gamma\right)$.—Este, como se vé por la fórmula (169), es el coeficiente de cos 2 ϕ. Usaremos logaritmos de cinco cifras; vemos por el cálculo anterior que $\log (1 + \gamma^2) = 0.00000$ o sea, que $1 + \gamma^2$ no se difiere de 1.

Por esto se deduce la fórmula a $2\gamma - \gamma = \gamma$ que basta multiplicarlo por M:

$$M = 0.43429448$$
$$\log M = 9.63778\ (43) - 10$$
$$\log\left(\frac{2\gamma}{1 + \gamma^2} - \gamma\right) = \log \gamma = 7.22380 - 10$$
$$\log M\left(\frac{2\gamma}{1 + \gamma^2} - \gamma\right) = 6.86158 - 10$$
$$M\left(\frac{2\gamma}{1 + \gamma^2} - \gamma\right) = 0.0007271$$

i éste es el coeficiente buscado.

Pero ésta simplificación no sucede en caso que se calcule con logaritmos de mayor número de cifras, pues entónces ya no es despreciable γ^2 con relacion a la unidad.

2.º — $-\frac{1}{2} M\left[\left(\frac{2\gamma}{1+\gamma^2}\right)^2 - \gamma^2\right]$. — Como vamos a proceder tambien con cinco cifras podemos luego decir que $1 + \gamma^2 = 1$ i por lo tanto el coeficiente se reduce a

$$\frac{1}{2} M \times 3\gamma^2 .$$

Entónces:

$$\begin{aligned} \log 3 &= 0.47712 \\ \log \gamma^2 &= 4.44760 - 10 \\ \log M &= 9.63778 - 10 \\ \log \frac{1}{2} &= 9.69897 - 10 \end{aligned}$$

$$\log \frac{1}{2} M\left[\left(\frac{2\gamma}{1+\gamma^2}\right)^2 - \gamma\right] = 4.26147 - 10$$

i por lo tanto:

$$-\frac{1}{2} M\left[\left(\frac{2\gamma}{1+\gamma^2}\right)^2 - \gamma\right] = -0.0000018$$

Este es el coeficiente de cos 4 ϕ i se nota la gran rapidez con que disminuyen los coeficientes i en vista de ésto no determinaremos mas, pues, serán completamente despreciables,

Si en la fórmula (169) reemplazamos los valores encontrados, nos queda:

$$\log \frac{\rho}{a} = 9.9992747 + 0.0007271 \cos 2\phi - 0.0000018 \cos 4\phi$$

$$\log \frac{\rho}{a} = 9.9992747 + [6.86158] \cos 2\phi - [4.26147] \cos 4\phi$$

queriendo significar las cantidades entre paréntesis los logaritmos de los coeficientes respectivos.

§ 25. *Aplicaciones.*—1.º Cálculo de ρ para Santiago.—En este caso tenemos:

$$\phi = -33^{\circ}\ 26.'70$$

$$2\phi = -66^{\circ}\ 53.'40 \qquad 4\phi = -133^{\circ}\ 46'.80$$

$$\log\cos 2\phi = 9.59384 - 10 \qquad \log\cos 4\phi = 9.84003\,n - 10$$

$$+\ \underline{6.86158 - 10} \qquad +\ \underline{4.26147\ \ -10}$$

$$6.45542 - 10 \qquad 4.10150\,n - 10$$

$$0.0007271\cos 2\phi = 0.0002854 \qquad 0.0000018\cos 4\phi = -0.0000013$$

por lo tanto:

$$\log\frac{\rho}{a} = 9.9992747 + 0.0002854 + 0.0000013$$

$$\log\frac{\rho}{a} = 9.9995614$$

Si necesitamos el valor de ρ en kilómetros basta que sumemos al miembro encontrado el logaritmo de a espresado en kilómetros, es decir:

$$\log\frac{\rho}{a} = 9.9995614$$

$$\log a = \underline{3.8046435}$$

$$\log\rho = 3.8042049$$

i por lo tanto:

$$\rho = 6370.960 \text{ klms.}$$

Los valores encontrados para log ρ i ρ se diferencian solo de una unidad de la última cifra de los encontrados (páj. 37) que es incertidumbre del cálculo.

2.° *Cálculo de* ρ *para Espejo.*—En este caso la latitud jeográfica es:

$$\phi = -33^{\circ}\ 33.'78$$

$2\,\phi = -67^{\circ}\ 7.'56$	$4\,\phi = -134^{\circ}\ 15.'12$
$\log\cos 2\,\phi = 9.58962 - 10$	$\log\cos 4\,\phi = 9.84374\,n - 10$
$+\ 6.86158 - 10$	$+\ 4.26147 - 10$
$6.45120 - 10$	$4.10521\,n - 10$
$+\ 0.0002826$	$-\ 0.0000013$

$$\log\frac{\rho}{a} = 9.9992747 + 0.0002826 + 0.0000013$$

$$\log\frac{\rho}{a} = 9.9995586$$

$$\log a = 3.8046435$$

$$\log\rho = 3.8042021$$

$$\rho = 6370.919 \text{ klms.}$$

A pesar de la distancia pequeña de los dos observatorios se difieren los radios respectivos de 0.041 kilómetros, es decir, 41 metros.

§ 26. *Tablas.*—Tambien existen tablas para el valor de ρ o $\log\rho$ o bien $\log\frac{\rho}{a}$ tomando como argumento la latitud jeográfica ϕ. Así, por ejemplo, las tablas de Albrecht [1]) dan en la pájina 268 los valores de $\phi' - \phi$ i de $\log\frac{\rho}{a}$, ademas, de otras cantidades que sólo dependen de ϕ. Copiamos aquí una parte de dichas tablas:

[1]) Th. Albrecht. Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. Vierte Auflage. Leipzig 1908.

ϕ	$\phi' - \phi$		$\log \frac{\rho}{a}$	
33° 10'	— 10' 31".71		9.9995678	
		— 1."61		— 38
33 20	33.32	+ 0."02	5640	
		— 1.59		— 39
33 30	34.91	+ 0.02	5601	
		— 1.57		— 39
33 40	36.48	+ 0.02	5562	
		— 1.55		— 39
33 50	38.03		5523	

Por medio de estos valores vamos a determinar ϕ' i $\log \frac{\rho}{a}$ para Santiago i para Espejo.

Notemos que ϕ i ϕ' tienen siempre el mismo signo i que ρ es el mismo cualquiera que sea el signo de ϕ. Podemos, por lo tanto, suponer que ϕ sea positivo.

Santiago: $\phi = 33° 26.'70$ Lo Espejo: $\phi = 33° 33.'78$

Interpolaremos, pues, respectivamente con:

6.'70 i 3.'78

Para calcular $\phi' - \phi$ aplicamos la fórmula de Stirling: (véase la clase del año 1909)

$$f(a + n\omega) = f(a) + n f'(a) + \frac{n^2}{2} f''(a)$$

Para los casos considerados tenemos:

$n\omega = 6.'70$ $n\omega = 3.'78$

i como el argumento está espaciado de 10 en 10', es decir, $\omega = 10$, resulta:

$n = 0.670$	$n = 0.378$
$f'(a) = -1.''60$	$f'(a) = -1.''58$
$f''(a) = +0.''02$	$f''(a) = +0.''02$
$f(a) = -10.'33.''32$	$f(a) = -10'34.''91$
$nf'(a) = -1.072$	$nf'(a) = -0.597$
$\frac{n^2}{2}f''(a) = +0.004$	$\frac{n^2}{2}f''(a) = +0.001$
$\phi' - \phi = -10.'34.''39$	$\phi' - \phi = -10'35.''51$
$\phi = 33^\circ 26' 42.''0$	$\phi = 33^\circ 33' 47''$
$\phi' = 33^\circ 16' 7.''6$	$\phi' = 33^\circ 23' 11''$

Para $\log \frac{\rho}{a}$ obtenemos:

$n = 0.670$	$n = 0.378$
$f'(a) = -39$	$f'(a) = -39$
$f''(a) = 0$	$f''(a) = 0$
$f(a) = 9.9995640$	$f(a) = 9.9995601$
$nf'(a) = -26$	$nf'(a) = -15$
$\log \frac{\rho}{a} = 9.9995614$	$\log \frac{\rho}{a} = 9.9995586$

Vemos que los valores que hemos determinado por este procedimiento concuerdan perfectamente con aquellos que hemos tenido ocasion de determinar por otros procedimientos, (páj. 66 i 67) i ésto nos hace ver las grandes ventajas que nos aporta el uso de tablas astronómicas.

BIBLIOTECA NACIONAL
SECCION CHILENA

§ 27. *Coordenadas de un punto cualquiera de la superficie terrestre con relacion a un sistema fijo de coordenadas.*—Al decir sistema fijo no queremos significar que él sea absolutamente fijo, sino que participará del movimiento anual de la tierra pero nó del diurno.

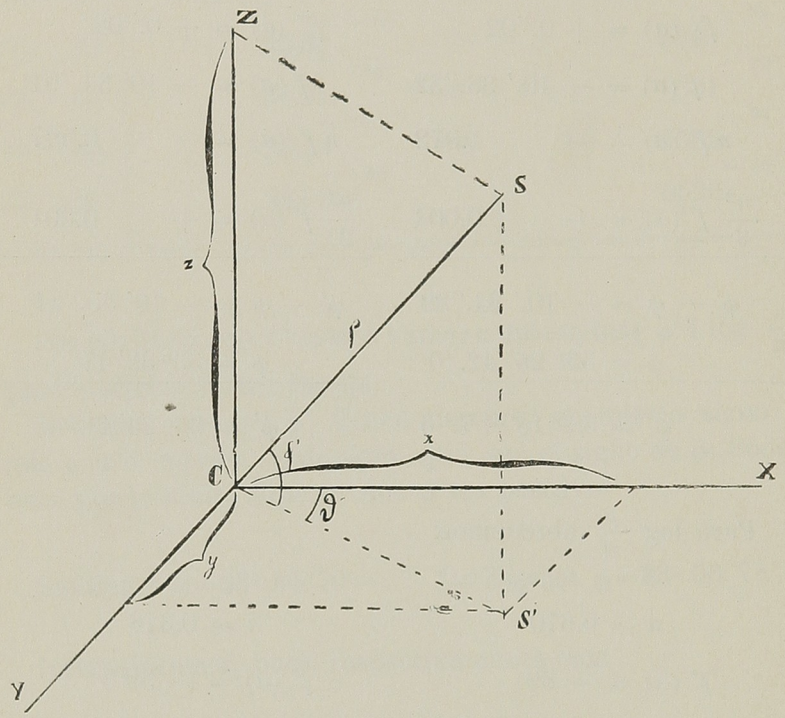

Figura 13.

Elejiremos tres ejes CZ, CX i CY cuyo oríjen C es el centro de la tierra, CZ está en la direccion del polo Norte, CX está dirijido al punto vernal i CY normal a éste en el ecuador i dirijido al punto $\alpha = 6^h$. Consideremos un punto cualquiera S (fig. 13) de la superficie terrestre, vamos, pues, a determinar las coordenadas de ese punto respecto del sistema que hemos elejido, que es el ecuatorial. Desde luego, vemos que esas coordenadas no son todas invariables, pues, debido al movimiento de rotacion de la tierra, el punto S describe

una circunferencia al rededor de CZ. Unamos S con C i sea CS' la proyeccion de CS sobre el ecuador; es decir, que el ángulo SCS' es el que en los párrafos anteriores hemos llamado latitud jeocéntrica i que hemos designado por ϕ'; ademas, la distancia CS es el radio correspondiente al punto S i lo hemos designado por ρ. El plano SCS' por contener a la vertical del punto S, i ademas, por estar sobre él la línea de los polos CZ, es el meridiano del punto S. Sea θ el ángulo que el meridiano forma con CX; es decir, que θ es el ángulo XCS'. De las cantidades que hemos definido sabemos que ϕ' i ρ son constantes para un mismo lugar miéntras que θ varia con el tiempo i los relojes siderales nos dán su valor para un instante cualquiera, pues, ese ángulo no es otra cosa que el ángulo horario del punto vernal i precisamente los relojes siderales se calibran de modo que en cualquier instante nos dén ese ángulo horario: en resúmen, θ es el tiempo sideral.

Conocidas, pues, las cantidades ϕ, ρ i θ vamos a determinar las coordenadas de S. De la figura se deduce:

$$CS' = \rho \cos \phi' \tag{170}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= CS' \cos \theta \\ y &= CS' \cos (90 - \theta) \\ z &= \rho \cos (90 - \phi') \end{aligned}\right\} \tag{171}$$

o sea,

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi' \cos \theta \\ y &= \rho \cos \phi' \operatorname{sen} \theta \\ z &= \rho \operatorname{sen} \phi' \end{aligned}\right\} \tag{172}$$

De estas fórmulas se deduce que las coordenadas x e y varian con el tiempo, miéntras que la coordenada z es inva-

riable. Esto, por otra parte, es evidente, puesto que el punto S se mueve en un plano paralelo al ecuador i por lo tanto z que es la distancia de S a ese plano, debe quedar invariable.

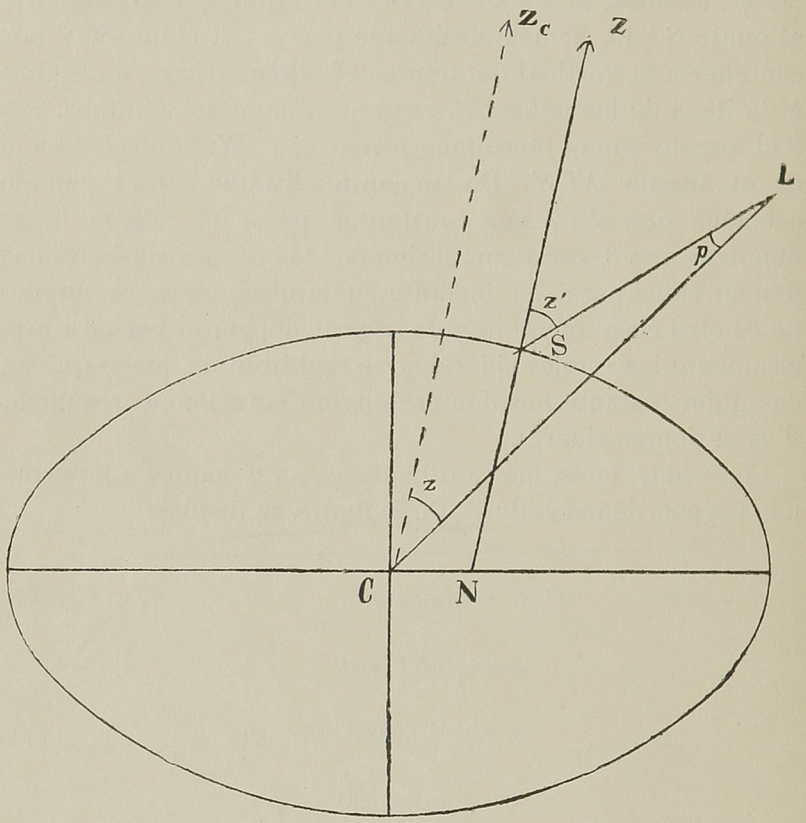

Figura 14.

§ 28. *Efecto de la paralaje en la distancia zenital.*—Supongamos que la elipse de la figura 14 represente el meridiano del punto S. La línea SZ, normal a la elipse en el punto S representará la direccion al zenit. Sea C el centro de la tierra i L un astro que vamos a suponer sea la luna. La distancia zenital del astro L medida en el punto S será el ángulo ZSL i lo denominaremos z'. Veamos ahora cuál es la distancia zenital de él medida en el centro de la

tierra; como se comprende, debemos ante todo definir lo que vamos a llamar zenit del centro de la tierra, pues en realidad, este punto carece de zenit, o mas bien dicho, cualquier punto del cielo puede ser su zenit. Esto último lo aprovecharemos para decir que el zenit del punto C referido a un punto S es el mismo zenit de este punto; es decir, que en la figura el zenit de C estará en la direccion CZ_c, paralela a SZ. Por lo tanto, la distancia zenital de L medida en el centro de la tierra es el ángulo Z_cCL, ángulo que llamaremos z. El ángulo que en realidad se mide es la distancia zenital verdadera z'; la paralaje de L será el ángulo $SLC = p$. Ahora debemos determinar z en funcion de z', p i otras cantidades. Pero el procedimiento para ésto es largo i engorroso si se considera el problema tal como hasta ahora lo hemos presentado, pero él se simplifica considerablemente si nos referimos a ciertos casos particulares, casos que comprenden todos los cuerpos del sistema solar ménos la luna. En efecto, se puede demostrar que para todos estos astros, debido a sus distancias mas o ménos considerables de la tierra, se puede considerar que el punto N, interseccion de la vertical de S con el ecuador, coincida con C i ésto equivale a decir que la tierra la consideramos como una esfera, puesto que la única superficie en que todas las normales pasan por un mismo punto es la esfera.

Tomaremos como radio de esa esfera la distancia al centro de la tierra del punto de observacion.

Sea entónces (fig. 15) C el centro de la tierra, S el lugar de la observacion i P un planeta o cometa cualquiera. El zenit Z se encontrará en la prolongacion de la recta CS. Las distancias zenitales medidas en S i C serán z' i z respectivamente; sea p la paralaje de P, i ademas, sean Δ i Δ' las distancias del astro a C i a S respectivamente.

Lo que queremos es determinar z en funcion de z'. Puesto que el ángulo z' es esterior del triángulo CPS, podemos escribir:

$$z' = z + p \qquad (173)$$

de donde,

$$z = z' - p \qquad (174)$$

relacion sencillísima que nos da el valor de z.

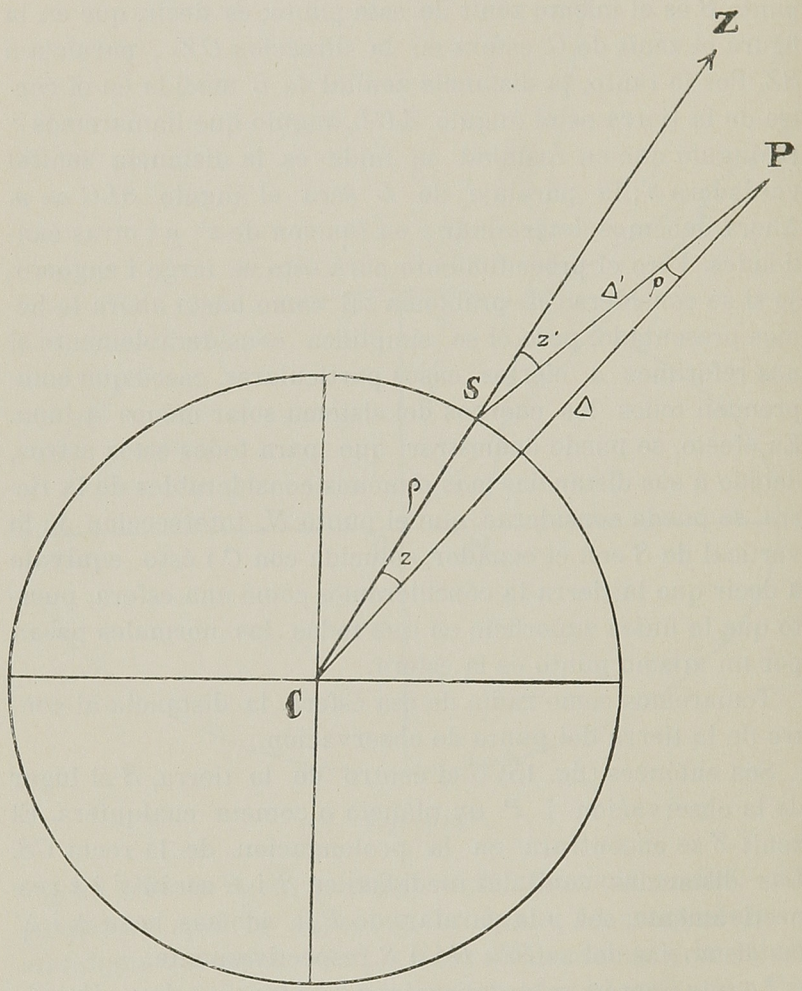

Figura 15.

Determinemos ahora el valor de p en funcion de la distancia del astro al centro de la tierra. Del mismo triángulo CPS se deduce:

$$\frac{\text{sen } p}{\text{sen } (180 - z')} = \frac{\rho}{\triangle} \qquad (175)$$

pero siendo la paralaje p un ángulo pequeño podemos decir que $\text{sen } p = p''\ \text{sen } 1'' = \frac{p''}{206265}$ i por lo tanto:

$$\frac{p}{206265\ \text{sen } z'} = \frac{\rho}{\triangle} \qquad (176)$$

de donde,

$$p = 206265\ \frac{\rho}{\triangle}\ \text{sen } z' \qquad (177)$$

i obtenemos así el valor de p.

Analicemos un poco las fórmulas que nos dan los valores de z i de p. Desde luego, la primera fórmula podemos escribirla en la forma:

$$z' - z = p \qquad (178)$$

i esta diferencia $z' - z$ se designa jeneralmente por p_z .

Ademas, se deduce de la fórmula (174) que z es menor que z'; es decir, que la estrella observada desde un punto cualquiera de la superficie terrestre se ve mas bajo que observado desde el centro. Esto, por otra parte, se esplica fácilmente por un movimiento relativo, pues en realidad, un observador que vaya desde C hasta S, *asciende*, i por lo tanto cualquier cuerpo que él observe parecerá *descender*, es decir, que su distancia zenital irá aumentando. Es exactamente lo mismo que observamos diariamente. Suponemos un monte lejano i un objeto cualquiera, por ejemplo, un poste telegráfico; si una persona lo observa desde abajo verá proyectarse el estremo del poste en la cima del monte i si la persona asciende i lo observa desde el balcon de una casa, lo verá proyectarse mas bajo que ántes en un punto de la llanura.

Estudiemos ahora el valor de la paralaje p; desde luego se

deduce de la fórmula (177) que el valor máximo de la paralaje tiene lugar cuando sen $z'=1$; es decir, cuando $z=90^o$; en este caso se tiene:

$$p = 206265 \frac{\rho}{\Delta} \qquad (179)$$

Este valor de p, debido a que el astro se encuentra en el horizonte, se llama *paralaje horizontal.* Pero éste no es el máximum-maximorum, puesto que sabemos que ρ es distinto para observatorios que tienen distinta latitud jeográfica, i por lo tanto el máximum-maximorum se obtiene cuando el observatorio está en el ecuador, i si llamamos p_e ese valor de la paralaje, obtenemos:

$$p_e = 206265 \frac{a}{\Delta} \qquad (180)$$

i este valor de p por corresponder a un observatorio situado en el ecuador i a un astro en el horizonte se llama *paralaje ecuatorial-horizontal.*

En cuanto al influjo de la paralaje en el azimut bástanos decir que se pueden deducir fórmulas que dan su valor cuando se trata de la luna. Si se trata de otro cuerpo cualquiera del sistema solar podemos suponer siempre que la tierra es una esfera; i en este caso se deduce fácilmente de la figura 15 que el influjo de la paralaje en el azimut es cero. En efecto, el azimut del punto P, considerando el observador en S, es el ángulo que el plano vertical ZSP forma con el meridiano; ahora el azimut del mismo punto P si el observador está en C es el ángulo que el plano ZCP forma con el meridiano; pero los planos ZCP i ZSP coinciden puesto que tienen la recta CZ comun i ademas el punto P; por lo tanto ambos azimutes son iguales, lo que nos comprueba lo aseverado.

Repetimos pues, tanto lo que acabamos de decir como las fórmulas que hemos deducido son aplicables a todos los

cuerpos del sistema solar escepcion hecha de la luna, cuyas observaciones aquí escluimos de la consideracion jeneral, siendo mui escepcionales los casos donde se observa un azimut de la luna con última exactitud. Solo los meteoros son todavía mas cercanos de la luna; pero las observaciones de estos son tan inciertas que no vale la pena de afectar sus azimutes de correccion alguna.

§ 29. *Influjo de la paralaje en la ascension recta i declinacion aparentes.* —Llamaremos α' δ' i $\triangle'$ la ascension recta, declinacion i distancia del astro al punto de observacion, referidas las dos primeras cantidades a ese mismo punto, i α, δ i $\triangle$ las cantidades análogas referidas al centro de la tierra. Queremos encontrar relaciones entre estas cantidades, entrando ademas las que definen la posicion del punto de observacion respecto del centro de la tierra, es decir, ρ, θ i ϕ'.

El procedimiento que seguiremos para ésto será el de determinar las coordenadas rectilíneas del astro en dos sistemas de coordenadas cuyos oríjenes estén en el centro de la tierra i en el lugar de la observacion i despues comparar esas coordenadas entre sí.

El sistema que elijiremos teniendo su oríjen en el centro de la tierra será el ecuatorial, sistema en que los ejes de las X i de las Y están en el ecuador, estando el de las X dirijido al punto vernal i el eje de las Z dirijido al polo Norte. Los ejes del sistema cuyo oríjen está en el observatorio serán respectivamente paralelos a los del sistema anterior i los denominaremos Ξ, H i Z.

Sean x, y, z las coordenadas del observatorio en el sistema X,Y,Z; sean ademas X, Y, Z i ξ, η, ζ las coordenadas del astro en los sistemas que llevan esas mismas designaciones. Ante todo veamos como se pueden relacionar estas diversas cantidades. Para ésto consideremos dos sistemas de coordenadas planos de ejes paralelos (fig. 16).

Refiriéndonos en esta figura a las magnitudes allí anotadas, fácilmente obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= X - x \\ \eta &= Y - y \\ \zeta &= Z - z \end{aligned}\right\} \qquad (181)$$

i a priori podemos agregar

i obtenemos así las tres fórmulas de trasformacion correspondientes en el espacio a dos sistemas de ejes paralelos.

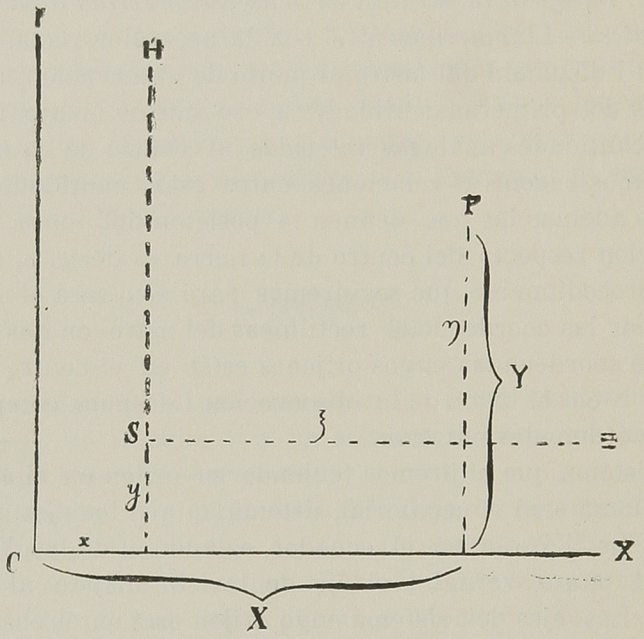

Figura 16.

Ahora bien, pocos párrafos atras ya determinamos las coordenadas rectilíneas del observatorio respecto de un sistema que si recordamos es el mismo que acabamos de definir, teniendo su oríjen en el centro de la tierra, i obtuvimos:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi' \cos \theta \\ y &= \rho \cos \phi' \operatorname{sen} \theta \\ z &= \rho \operatorname{sen} \phi' \end{aligned}\right\} \qquad (172)$$

En cuanto a la determinacion de X, Y, Z ya varias veces la hemos hecho en cursos anteriores; sin embargo, como su deduccion es tan sencilla la repetiremos aquí. Representemos en perspectiva los tres ejes (fig. 17); sea P el planeta i

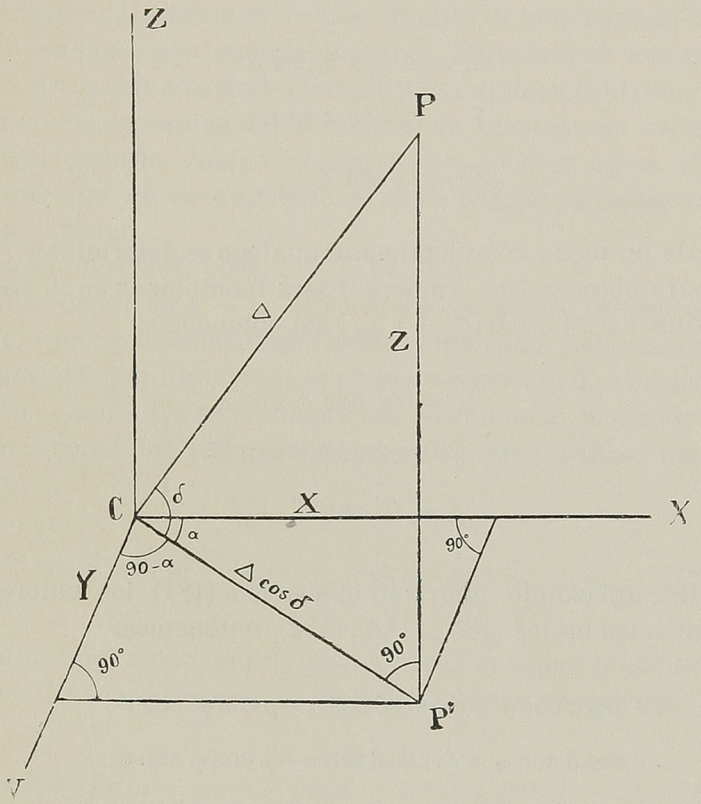

Figura 17.

CP' la proyeccion de CP sobre el plano XCY, que es el ecuador; entónces tenemos:

$$\left.\begin{aligned} Z &= \Delta \operatorname{sen} \delta \\ X &= CP' \cos \alpha \\ Y &= CP' \cos (90 - \alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (182)$$

pero como

$$CP' = \triangle \cos \delta \qquad (183$$

resulta

$$\left.\begin{aligned} X &= \triangle \cos \delta \cos \alpha \\ Y &= \triangle \cos \delta \operatorname{sen} \alpha \\ Z &= \triangle \operatorname{sen} \delta \end{aligned}\right\} \qquad (184)$$

De un modo completamente análogo se determinan ξ, η, ζ, i para obtener sus valores basta reemplazar en el sistema último $\triangle$, δ i α por $\triangle'$ δ' i α', i así obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \triangle' \cos \delta' \cos \alpha' \\ \eta &= \triangle' \cos \delta' \operatorname{sen} \alpha' \\ \zeta &= \triangle' \operatorname{sen} \delta' \end{aligned}\right\} \qquad (185)$$

Reemplazando ahora en el sistema (181) los valores encontrados en los (185), (184), (172), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \triangle' \cos \delta' \cos \alpha' &= \triangle \cos \delta \cos \alpha - \rho \cos \phi' \cos \theta \\ \triangle' \cos \delta' \operatorname{sen} \alpha' &= \triangle \cos \delta \operatorname{sen} \alpha - \rho \cos \phi' \operatorname{sen} \theta \\ \triangle' \operatorname{sen} \delta' &= \triangle \operatorname{sen} \delta - \rho \operatorname{sen} \phi' \end{aligned}\right\} \qquad (186)$$

i resolviendo este sistema de tres ecuaciones podemos obtener los valores exactos de las tres incógnitas $\triangle'$, δ' i α' si conocemos todos los elementos que entran en los segundos miembros. Debido a que los ángulos α' i α i δ' i δ son parecidos, estas fórmulas no se emplean en la práctica i se reemplazan por otras mas sencillas que nos dán $\alpha' - \alpha$ i $\delta' - \delta$. En cuanto a $\triangle' - \triangle$ no tiene interes sino para el caso de la luna en que por estar tan cerca de nosotros una variacion pe-

queña de su distancia a nosotros se traduce en una variacion de su diámetro aparente. En efecto, la luna al salir está mas léjos de nosotros que cuando culmina en el meridiano; por lo tanto, si se mide su diámetro aparente en esas dos posiciones él es mayor en el último caso. Sin embargo, el observador a ojo desnudo ve mas grande la luna cuando ella sale o se pone que cuando culmina. Pero ésto es solo una ilusion de óptica aun no bien esplicada: algunos la atribuyen a que en las cercanias del horizonte se encuentran objetos con qne poderla comparar, como ser árboles, casas, etc., miéntras que en su culminacion estos objetos de comparacion no existen.

Determinaremos, pues, $\alpha' - \alpha$ i $\delta' - \delta$.

§ 30. *Cálculo de* $\alpha' - \alpha$.—Usaremos para ésto un procedimiento que ya muchas veces hemos empleado; partamos del sistema (186): multiplicando la primera ecuacion de este sistema por $-\text{sen } \alpha$ i la segunda por $\cos \alpha$ i sumando, haciendo al mismo tiempo las reducciones sencillas que resultan, obtenemos:

$$\Delta' \cos \delta' \operatorname{sen} (\alpha' - \alpha) = -\rho \cos \phi' \operatorname{sen} (\theta - \alpha) \qquad (187)$$

Del mismo modo, multiplicando esas mismas ecuaciones por $\cos \alpha$ i $\text{sen } \alpha$ respectivamente i sumando, obtenemos:

$$\Delta' \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha) = \Delta \cos \delta - \rho \cos \phi' \cos (\theta - \alpha) \qquad (188)$$

i dividiendo estas dos ecuaciones miembro a miembro, nos queda:

$$\operatorname{tg} (\alpha' - \alpha) = - \frac{\rho \cos \phi' \operatorname{sen} (\theta - \alpha)}{\Delta \cos \delta - \rho \cos \phi' \cos (\theta - \alpha)} \qquad (189)$$

Esta fórmula es todavía rigurosamente exacta puesto que en los desarrollos no hemos hecho ninguna hipótesis sobre

los valores de sus diversos términos ni hemos despreciado nada. Podemos dividir numerador i denominador del segundo miembro por $\triangle \cos \delta$ i entónces se reduce a:

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = - \frac{\frac{\rho \cos \phi'}{\triangle \cos \delta} \operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{1 - \frac{\rho \cos \phi'}{\triangle \cos \delta} \cos(\theta - \alpha)} \qquad (190)$$

i vemos que esta fórmula es completamente análoga a la

$$\operatorname{tg} y = \frac{a \operatorname{sen} x}{1 - a \cos x} \qquad (62)$$

en que el ángulo y lo obtuvimos por la siguiente série:

$$y = a \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} a^3 \operatorname{sen} 3x + \ldots \qquad (103)$$

Por lo tanto $\alpha' - \alpha$ tambien lo podemos determinar por una série análoga si solo reemplazamos y por $\alpha' - \alpha$, a por $\frac{\rho \cos \phi'}{\triangle \cos \delta}$ i x por $\theta - \alpha$ i si ademas afectamos el lado derecho del signo ménos; es decir obtenemos:

$$\alpha' - \alpha = - \left[\frac{\rho \cos \phi'}{\triangle \cos \delta} \operatorname{sen}(\theta - \alpha) + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho \cos \phi'}{\triangle \cos \delta} \right)^2 \operatorname{sen} 2(\theta - \alpha) + \ldots \right] \qquad (191)$$

Veamos ahora cuantos términos de esta série debemos calcular para obtener $\alpha' - \alpha$ con la exactitud requerida. Para fijar las ideas refirámonos a ciertos casos particulares, por ejemplo, a la luna; en este caso $\frac{\rho}{\triangle}$ vale próximamente $\frac{1}{60}$; entónces el coeficiente del segundo término val-

drá $\frac{1}{2} \times \frac{1}{60^2} = \frac{1}{7200}$ i si queremos espresar ésto en segundos de arco debemos multiplicar por 206000 lo que nos dá $\frac{206000}{7200}$ lo que dá mas o ménos unos 29". Haciendo un cálculo análogo el coeficiente del tercer término valdrá mas o ménos 0."3 i así en seguida i por lo tanto en el caso de la luna habrá que calcular unos tres o cuatro términos de la série. Pero dejando a un lado la luna consideremos un planeta cualquiera como ser Marte, cuya distancia mínima a la tierra es de unos 60 millones de kilómetros; como se trata de un cálculo aproximado podemos suponer que $\rho = 6000$ kilómetros; entónces $\frac{\rho}{\Delta} = \frac{60 \times 10^2}{60 \times 10^6} = \frac{1}{10^4}$ i ésto espresado en ángulo nos dá $\frac{200000}{10^4} = 20''$ como factor del primer término. El coeficiente del segundo término valdrá $\frac{1}{2} \frac{2 \times 10^5}{10^8} = \frac{1}{10^3} = 0.''001$ i ésta es una cantidad despreciable mas aun si se considera que ella puede ser multiplicada por un número menor que la unidad; i lo mismo sucede con cualquier otro planeta.

En resúmen, escepcion hecha de la luna, la fórmula aplicable a todos los cuerpos del sistema solar es:

$$a' - a = - \frac{\rho \cos \phi'}{\Delta \cos \delta} \operatorname{sen} (\theta - a) \qquad (192)$$

o bien reemplazando el ángulo horario $\theta - a$ por t:

$$a' - a = - \frac{\rho \cos \phi'}{\Delta \cos \delta} \operatorname{sen} t \qquad (193)$$

Discutamos un poco esta fórmula. Desde luego, el coeficiente $\frac{\rho \cos \phi'}{\Delta \cos \delta}$ es siempre positivo puesto que ρ i Δ son dos distancias que no pueden ser negativas i ϕ' i δ son siempre menores que 90° en valor absoluto i por lo tanto sus

cosenos son tambien siempre positivos. Se deduce de ésto que el signo de $\alpha' - \alpha$ es siempre el signo contrario de sen t.

Ahora bien, el ángulo t se cuenta desde el meridiano de 0^h a 24^h en el sentido del movimiento diurno, o bien de 0^h a $+ 12^h$ i de 0^h a -12^h tambien a partir del meridiano, contándose en el primer caso en el sentido del movimiento diurno i en el segundo, en sentido contrario; es decir, el ángulo horario es positivo despues del meridiano i negativo ántes.

Ahora bien, si es menor que 12^h resulta sen t positivo; si t mayor que 12^h, sen t es negativo; si t es igual a 0^h o a 12^h sen t es cero i por lo tanto para $\alpha' - \alpha$ obtenemos:

Si t está entre 0^h i 12^h, $\alpha' - \alpha$ es negativo

» t » » 12^h i 24^h, $\alpha' - \alpha$ es positivo

» t » $= 0^h$ ó $= 12^h$, $\alpha' - \alpha = 0$

En otros términos, podemos decir que $\alpha' - \alpha$ es negativo despues del meridiano, es positivo ántes del meridiano i es cero en el meridiano; o bien, que la paralaje disminuye las ascensiones rectas despues del meridiano i las aumenta ántes.

A estos mismos resultados llegamos por medio de otras consideraciones. En efecto, recordamos que el efecto de la paralaje en la distancia zenital era aumentarla, es decir, alejar el astro del meridiano, por lo tanto, si se observa un astro de un punto de la superficie terrestre él está mas léjos del meridiano que si se observara del centro de la tierra; le falta mas tiempo *para pasar* por el meridiano, por consiguiente, antes del meridiano su ascension recta es aumentada. Si el astro ya ha pasado por el meridiano lo mismo que ántes observado desde la superficie está mas léjos de ese plano que observado desde el centro; hace mas tiempo que *pasó* por el meridiano: luego, su ascension recta es menor. Basta, pues, para conocer el signo de $\alpha' - \alpha$ tener presente que siempre el astro observado desde la superficie está mas

léjos del meridiano que ese mismo astro observado desde el centro de la tierra.

Al aplicar la fórmula (193) debemos cuidar siempre que ρ i $\triangle$ estén espresados en la misma unidad. Para evitar el cálculo con números demasiado grandes la unidad que se toma en astronomía es el radio medio de la órbita terrestre, que vale en números redondos unos 150000000 de kilómetros. Para determinar el valor exacto de esta distancia consideremos la figura 18. Sea S el centro del Sol i C el centro de la tierra i $CS = R$ la distancia media de ámbos puntos.

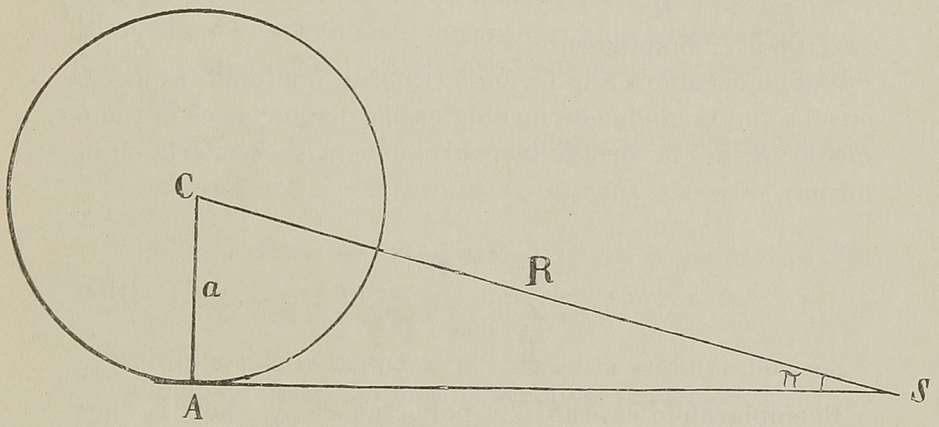

Figura 18.

El círculo dibujado con centro C representa el ecuador terrestre cuyo radio es a; si desde S trazamos la tanjente a ese círculo el ángulo $CSA = \pi$ es la paralaje ecuatorial horizontal del Sol. Del triángulo rectángulo CSA se deduce:

$$\operatorname{sen} \pi = \frac{a}{R} \qquad (194)$$

Ahora, las cantidades que vamos a espresar en unidades de R son ρ i $\triangle$, es decir, necesitamos $\frac{\rho}{R}$ i $\frac{\triangle}{R}$.

Pero

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\rho}{a} \cdot \frac{a}{R} = \frac{\rho}{a} \operatorname{sen} \pi \qquad (195)$$

Ahora bien, existe la costumbre de determinar el radio correspondiente a un punto en unidades del radio ecuatorial i de designar ese valor por ρ, es decir, que obtendremos:

$$\frac{\rho}{R} = \rho \operatorname{sen} \pi \qquad (196)$$

Ademas, el valor de la distancia de un planeta o cometa al centro de la tierra las efemérides lo dan ya tomando como unidad la distancia media del Sol a la tierra, es decir, que dan el valor $\frac{\triangle}{R}$ i existe la costumbre de designar esta razon por $\triangle$ simplemente.

Volvamos ahora a la fórmula (193); si queremos espresar en ella que la unidad de medida en las distancias es el radio medio R de la órbita terrestre, debemos escribirla en la forma:

$$\alpha' - \alpha = - \frac{\frac{\rho}{R} \cos \phi'}{\frac{\triangle}{R} \cos \delta} \operatorname{sen} t \qquad (197)$$

Reemplazando en ésta $\frac{\rho}{R}$ por $\rho \operatorname{sen} \pi$ i $\frac{\triangle}{R}$ por $\triangle$, nos queda:

$$\alpha' - \alpha = - \frac{\rho \operatorname{sen} \pi \cos \phi'}{\triangle \cos \delta} \operatorname{sen} t \qquad (198)$$

en que ρ es el radio del observatorio en unidades del radio ecuatorial i $\triangle$ la distancia del astro al centro de la tierra en unidades del radio medio de la órbita terrestre.

El valor de $\alpha' - \alpha$ dado por esta fórmula está espresado en arco i si queremos espresarlo en segundos de ángulo debemos dividir por sen 1"; es decir:

$$(\alpha' - \alpha)'' = - \frac{\rho \operatorname{sen} \pi \cos \phi'}{\triangle \operatorname{sen} 1'' \cos \delta} \operatorname{sen} t \qquad (199)$$

Pero π es un ángulo pequeño, i por lo tanto, podemos de-

cir que: sen $\pi = \pi''$ sen 1'' i por consiguiente, la fórmula se reduce a:

$$(\alpha' - \alpha)'' = -\frac{\pi \rho \cos \phi'}{\triangle \cos \delta} \text{ sen } t \qquad (200)$$

que es la fórmula definitiva, en que π es la paralaje ecuatorial horizontal media del Sol cuyo valor segun las determinaciones mas exactas es de 8.''800. Este valor, cuyo error máximo será de 0.''001 ha sido adoptado dejando al lado el de 8,''88 obtenido por las observaciones de los pasajes del planeta Venus por el disco solar 1874 i 1882, tomando el promedio de los valores que resultaron de observaciones de varios planetoides i especialmente de Eros en la oposicion 1900/1901.

§ 31. *Cálculo de* $(\delta' - \delta)$.—Ya hemos visto las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \triangle' \cos \delta' \cos \alpha' &= \triangle \cos \delta \cos \alpha - \rho \cos \phi' \cos \theta \\ \triangle' \cos \delta' \text{ sen } \alpha' &= \triangle \cos \delta \text{ sen } \alpha - \rho \cos \phi' \text{ sen } \theta \\ \triangle' \text{ sen } \delta' &= \triangle \text{ sen } \delta - \rho \text{ sen } \phi' \end{aligned}\right\} \qquad (186)$$

Multiplicando la primera por cos α i la segunda por sen α i sumando se tiene, despues de sencillas reducciones:

$$\triangle' \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha) = \triangle \cos \delta - \rho \cos \varphi' \cos (\theta - \alpha) \qquad (188)$$

i como

$$\cos (\alpha' - \alpha) = 1 - 2 \text{ sen}^2 \frac{\alpha' - \alpha}{2} \qquad (201)$$

resulta

$$\triangle' \cos \delta' = \triangle \cos \delta - \rho \cos \phi' \cos (\theta - \alpha) + 2 \triangle' \cos \delta' \text{ sen}^2 \frac{\alpha' - \alpha}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}}$$

$$= \triangle \cos \delta - \rho \cos \phi' \cos (\theta - \alpha) + \triangle' \cos \delta' \text{ sen } (\alpha' - \alpha) \frac{\text{sen } \frac{\alpha' - \alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}} \qquad (202)$$

pero sabemos que:

$$\Delta' \cos \delta' \operatorname{sen} (\alpha' - \alpha) = - \rho \cos \phi' \operatorname{sen} (\theta - \alpha) \quad (187)$$

luego:

$$\Delta' \cos \delta' = \Delta \cos \delta - \rho \cos \phi' \left[\cos (\theta - \alpha) + \operatorname{sen} (\theta - \alpha) \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha' - \alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}} \right] \quad (203)$$

o bien

$$\Delta' \cos \delta' = \Delta \cos \delta - \rho \cos \phi' . \frac{\cos \left(\theta - \frac{\alpha' + \alpha}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}} \quad (204)$$

$$\Delta' \operatorname{sen} \delta' = \Delta \operatorname{sen} \delta - \rho \operatorname{sen} \phi' \quad (186_3)$$

Introduzcamos los ángulos ausiliares β i γ relacionados con las ecuaciones anteriores, por las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \beta \operatorname{sen} \gamma &= \operatorname{sen} \phi' \\ \beta \cos \gamma &= \frac{\cos \phi' \cos \left(\theta - \frac{\alpha' + \alpha}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (205)$$

Las ecuaciones serán entónces:

$$\left. \begin{aligned} \Delta' \cos \delta' &= \Delta \cos \delta - \rho \beta \cos \gamma \\ \Delta' \operatorname{sen} \delta' &= \Delta \operatorname{sen} \delta - \rho \beta \operatorname{sen} \gamma \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

I si multiplicamos primeramente la primera por $+ \cos \delta$ i la segunda por $+ \operatorname{sen} \delta$ i despues la primera por $- \operatorname{sen} \delta$ i la segunda por $+ \cos \delta$ i agregamos en ámbos casos, resultan:

$$\left. \begin{aligned} \Delta' \cos (\delta' - \delta) &= \Delta - \rho \beta \cos (\delta - \gamma) \\ \Delta' \operatorname{sen} (\delta' - \delta) &= \rho \beta \operatorname{sen} (\delta - \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

De donde se obtiene:

$$\operatorname{tg}(\delta' - \delta) = \frac{\rho\,\beta \operatorname{sen}(\delta - \gamma)}{\triangle - \rho\,\beta \cos(\delta - \gamma)}$$

$$= \frac{\frac{\rho\,\beta}{\triangle}\operatorname{sen}(\delta - \gamma)}{1 - \frac{\rho\,\beta}{\triangle}\cos(\delta - \gamma)} \qquad (208)$$

Ecuacion análoga a

$$\operatorname{tg} y = \frac{a \operatorname{sen} x}{1 - a \cos x} \qquad (62)$$

cuyo desarrollo es

$$y = a \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} a^3 \operatorname{sen} 3x + \ldots . \qquad (103)$$

Por lo tanto se puede escribir:

$$\delta' - \delta = \frac{\rho\,\beta}{\triangle}\operatorname{sen}(\delta - \gamma) + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho\,\beta}{\triangle}\right)^2 \operatorname{sen} 2(\delta - \gamma) + \ldots . \qquad (209)$$

que es la fórmula que buscamos, i en la cual, lo mismo que en la análoga para ascension recta, solo debemos considerar el primer término del segundo miembro, escepto el caso de la luna.

En efecto,

$$\beta^2 = \operatorname{sen}^2 \phi' + \cos^2 \phi' \left(\frac{\cos\left(\theta - \frac{\alpha' + \alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha' - \alpha}{2}} \right)^2 \qquad (210)$$

tiene como máximo $= 1$, o sea cuando el efecto de la paralaje en ascension recta vale cero, es decir, en el meridiano, donde:

$$\beta^2 = \operatorname{sen}^2 \phi' + \cos^2 \phi'$$

De aquí el valor máximo del coeficiente del segundo término de la série valdrá $\frac{\rho}{\triangle}$.

Ahora bien, como $\triangle$ vale como mínimo, para los planetas, 60.10^6 kms., resultará:

$$\frac{\rho}{\triangle} = \frac{1}{10000}$$

Espresando en segundos:

$$\frac{\rho}{\triangle} = \frac{206000}{10000} = 20''$$

El segundo término valdrá pues en su máximo:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^8} \cdot 206.10^3 = \frac{103}{10^5} = \frac{1}{1000}$$

Vemos, pues, que dicho segundo término de la série valdrá al máximo mas o ménos 0''.001 i por esta razon podremos despreciarlo.

Esto es, la fórmula será entónces (escepcion hecha de la luna):

$$\delta' - \delta = \frac{\rho\,\beta}{\triangle} \operatorname{sen}(\delta - \gamma) \qquad (211)$$

Como es el caso de $(\alpha' - \alpha)$ espresaremos ρ i $\triangle$ en la misma unidad: ρ espresado en unidades del radio ecuatorial i ϕ espresado en unidades del radio medio de la órbita terrestre.

Entónces tendremos la fórmula:

$$\delta' - \delta = \frac{\rho\,\beta \operatorname{sen} \pi}{\triangle} \operatorname{sen}(\delta - \gamma) \qquad (212)$$

Para eliminar de esta última fórmula β i γ tenemos ya de (205):

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\phi' \frac{\cos\frac{\alpha' - \alpha}{2}}{\cos\left(\theta - \frac{\alpha' + \alpha}{2}\right)} \qquad (213)$$

la cual, como $(\alpha' - \alpha)$ es mui pequeño i $\frac{\alpha' + \alpha}{2}$ mui cercano a α, escribiremos:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\phi'}{\cos t} \qquad (214)$$

lo mismo

$$\beta = \frac{\operatorname{sen}\phi'}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad (205_1)$$

Reemplazando estos valores en la fórmula (212) para $(\delta' - \delta)$ tenemos primeramente:

$$\delta' - \delta = -\frac{\rho \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen}\phi'}{\triangle \operatorname{sen}\gamma} \operatorname{sen}(\gamma - \delta) \qquad (215)$$

Desarrollando:

$$\operatorname{sen}(\gamma - \delta) = \operatorname{sen}\gamma \cos\delta - \cos\gamma \operatorname{sen}\delta \qquad (216)$$

resulta:

$$\delta' - \delta = -\frac{\rho \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen}\phi'}{\triangle}(\cos\delta - \operatorname{sen}\delta \cot\gamma) \qquad (217)$$

o bien reemplazando el valor de tg γ de (214):

$$\delta' - \delta = -\frac{\rho \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen}\phi'}{\triangle}\left(\cos\delta - \frac{\operatorname{sen}\delta \cos t}{\operatorname{tg}\phi'}\right) \qquad (218)$$

de donde resulta la fórmula:

$$\delta' - \delta = -\frac{\rho \operatorname{sen}\pi}{\triangle}(\cos\delta \operatorname{sen}\phi' - \operatorname{sen}\delta \cos\phi' \cos t) \qquad (219)$$

BIBLIOTECA NACIONAL
SECCION CHILENA

Dejamos la fórmula así, pero sirviéndonos del ángulo paraláctico η (véase la clase del año 1909), ángulo comprendido entre el círculo vertical i horario tirado del polo norte, podríamos reemplazarla por:

$$\delta' - \delta = - \frac{\rho \operatorname{sen} \pi}{\Delta} \operatorname{sin} z \cos \eta$$

que hacemos únicamente para considerar con facilidad el signo de $\delta' - \delta$. Este será negativo o $\delta' < \delta$, siempre que η es un ángulo agudo. Eso sucede para el hemisferio boreal en toda la esfera, escepcion hecha del interior de un círculo cuyo centro está sobre el meridiano en el medio del zenit i del polo boreal i cuyo radio es la mitad de la distancia de esos dos puntos o sea $45 - \frac{\phi'}{2}$.

Para los puntos sobre la circunferencia de ese círculo es $\eta = 90^{\circ}$ i la paralaje en δ es cero, que se comprende tambien si nos fijamos en que miramos desde un observatorio un cometa bajado en su círculo vertical. Dado el caso que encima de la circunferencia de ese círculo el círculo horario corta verticalmente al círculo vertical, no influye un cambio en distancia zenital a la declinacion.

Al interior de ese círculo hai ángulos obtusos η i tambien la imajinacion nos muestra que allí alejándonos del zenit nos acercamos al polo, porque disminuyéndose la distancia zenital aumenta la declinacion. Al interior de ese círculo tiende, pues, la paralaje a hacer mayor la declinacion aparente que la jeocéntrica.

Para el hemisferio austral vale lo contrario porque hemos considerado los ángulos η, formados siempre por la parte del círculo horario que va al polo norte i por el círculo vertical respectivo. Para un observatorio del hemisferio austral son entónces obtusos en la mayor parte de la esfera los ángulos η, (véase el cometa C_1 fig. 19) rectos sobre el círculo respectivo, que pasa por su zenit i el polo austral i agudos dentro del círculo (véase el cometa C_2). Al interior de ese círculo es entónces $\delta' - \delta$ negativo, i como ámbos δ allí

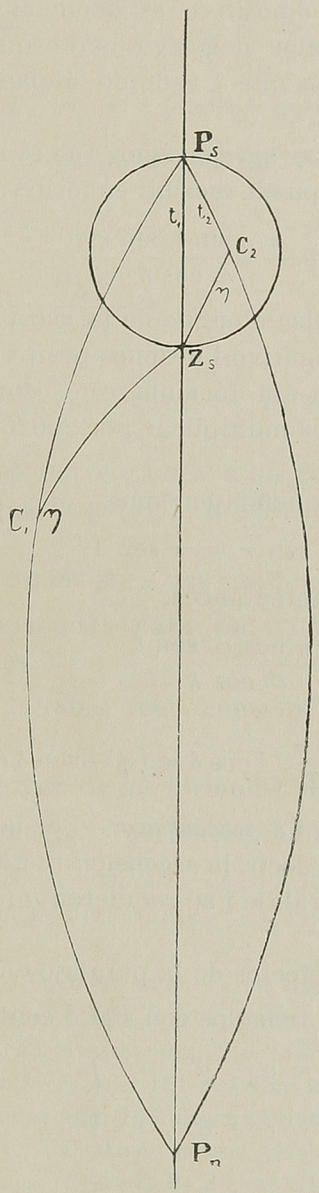

Figura 19.

son negativos, será δ' un valor negativo mayor que δ, habiéndose acercado el objeto al polo por la paralaje. Afuera del círculo será $\delta' - \delta$ positivo, es decir, al sur del ecuador celeste tiene δ' un valor negativo menor que δ, al norte un valor positivo mayor que δ, estando alejados del zenit del hemisferio austral.

Solo para completar agregaremos que tambien la fórmula (200) para $a' - a$ se puede escribir en forma análoga:

$$= - \frac{\pi \rho \operatorname{sin} z. \operatorname{sin} \eta,}{\triangle \cos \delta}$$

que tambien nos indica el signo de la paralaje, siendo η ántes del meridiano negativo i despues positivo.

Para que tambien esa fórmula esté espresada en segundos de arco debemos multiplicar por 206265 o bien dividir por sen 1".

Como π es tan pequeño, ponemos:

$$\operatorname{sen} \pi = \pi \operatorname{sen} 1''$$

Las fórmulas serán entónces:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a' - a)'' = - \dfrac{\rho \pi \cos \phi' \operatorname{sen} t}{\triangle \cos \delta} \qquad (200) \\ \\ (\delta' - \delta)'' = - \dfrac{\rho \pi}{\triangle} [\cos \delta \operatorname{sen} \phi' - \operatorname{sen} \delta \cos \phi' \cos t\,] \qquad (220) \end{array} \right.$$

§ 32. *Cálculo de* a i δ *jeocéntrica.*—Por las observaciones se obtiene a' i δ', es decir, la ascension recta i la declinacion afectadas por la paralaje i se requieren a i δ librados de la paralaje.

Sean p_a i p_δ los efectos de la paralaje en ascension recta i declinacion ámbos tomados con signo contrario. O sea:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_a = a - a' \\ p_\delta = \delta - \delta' \end{array} \right. \qquad (221)$$

De aquí:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a' + p_a \\ \delta = \delta' + p_\delta \end{array} \right. \qquad (222)$$

Hagamos:

$$\left.\begin{aligned} T_\alpha &= \pi\ \rho\ \cos\phi'\ \text{sen}\ t \\ T'_\delta &= \pi\ \rho\ \text{sen}\ \phi' \\ T_\delta &= -\ \pi\ \rho\ \cos\phi'\ \cos t \end{aligned}\right\} \qquad (223)$$

e introduzcamos estos valores en las fórmulas para $(\alpha' - \alpha)$ i $(\delta' - \delta)$.

Resultarán las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{T_\alpha}{\triangle\ \cos\delta} \\ p_\delta &= \frac{1}{\triangle}\left(T'_\delta\ \cos\delta\ +\ T_\delta\ \text{sen}\ \delta\right) \end{aligned}\right\} \qquad (224)$$

Agregando esas correcciones a las coordenadas observadas falsificadas por la paralaje se obtienen las coordenadas jeocéntricas.

Se han hecho tablas para las cantidades T_α, T'_δ i T_δ. [1] Siendo ρ i ϕ' constantes para cada observatorio el valor T'_δ tambien lo es.

Para T_α i T_δ la tabla tiene como argumento el ánguio horario t.

Como se puede ver de las fórmulas de T_α i T_δ, un valor de T_α con argumento t pertenece tambien como T_δ al argumento $(90^o - t)$ o sea $(6^h - t)$, lo que permite usar las mismas tablas con dos entradas.

---

(1) Tales tablas se encuentran en varios tratados astronómicos; citaré las calculadas por el Dr. E. von Rebeur-Paschwitz en la obra «Veröffentlichungen der Grossherzogl. Sternwarte zu Karlsruhe», tomo III del Dr. W. Valentiner, pájs. 181-204 i en las cuales vale la paralaje solar 8."848 i dadas para 168 observatorios.

Tambien el Dr. W. Valentiner en su «Handwörterbuch der Astronomie», tomo IV, páj. 243-262 da dichas tablas para 108 observatorios con la paralaje solar 8."80, que es ahora universalmente adoptada.

§ 33. *Paralaje en las observaciones meridianas.*—Sabemos que en el anteojo meridiano se reduce el momento del pasaje de una estrella por cualquier hilo al hilo medio por la fórmula $f.\sec \delta$, en la cual f es la distancia del hilo al hilo medio i δ la declinacion de la estrella. Como el movimiento propio de una estrella fija es inapreciable durante el pasaje del primero al último hilo no se comete error aplicando la fórmula para reduccion al hilo medio ya conocida.

No sucede lo mismo en observaciones de astros de paralaje apreciable, como son los planetas, cometas, el sol, la luna, porque su desplazamiento propio con respecto a las estrellas se puede notar durante el pasaje de uno a otro hilo. Ahora bien, algunos de los astros ya enumerados presentan al anteojo discos cuyo centro es imposible definir para hacer los contactos, i por eso se toman las señales en los instantes en que los hilos son tanjentes a los bordes. Si ambos bordes del cuerpo están observados, se puede suponer que el instante del pasaje del centro corresponde al valor promedio de los momentos de los bordes.

Si el cuerpo observado presenta fases como la luna i los planetas inferiores, solo se considera el limbo esterior i se reduce el contacto al centro, por las fórmulas que daremos atras.

En planetas de reducido diámetro se dimidia el disco al hacer la señal; lo mismo pasa con núcleos de cometas.

En las fórmulas tomaremos en consideracion luego juntos los efectos de: paralaje, movimiento propio i semidiámetro del astro.

Para reunir en una fórmula tales efectos recordemos la ecuación que relaciona el tiempo sideral con la ascension recta i las correcciones del instrumento.

Sean los errores del círculo meridiano m, n, c.

Sea $P_s B$ el meridiano i sea E el estremo oeste del eje del anteojo (fig. 20).

En el curso del año 1910 se trató estensamente de los errores del instrumento meridiano, i por esta razon no entraremos en detalles sobre ellos.

Entónces, siendo P_s el polo i S una estrella que pasa por un hilo, tendremos que:

$$P_s E = 90^o + n$$

o sea la distancia polar sur del punto E, i cuyo ángulo horario vale:

$$BP_sE = 90^o - m$$

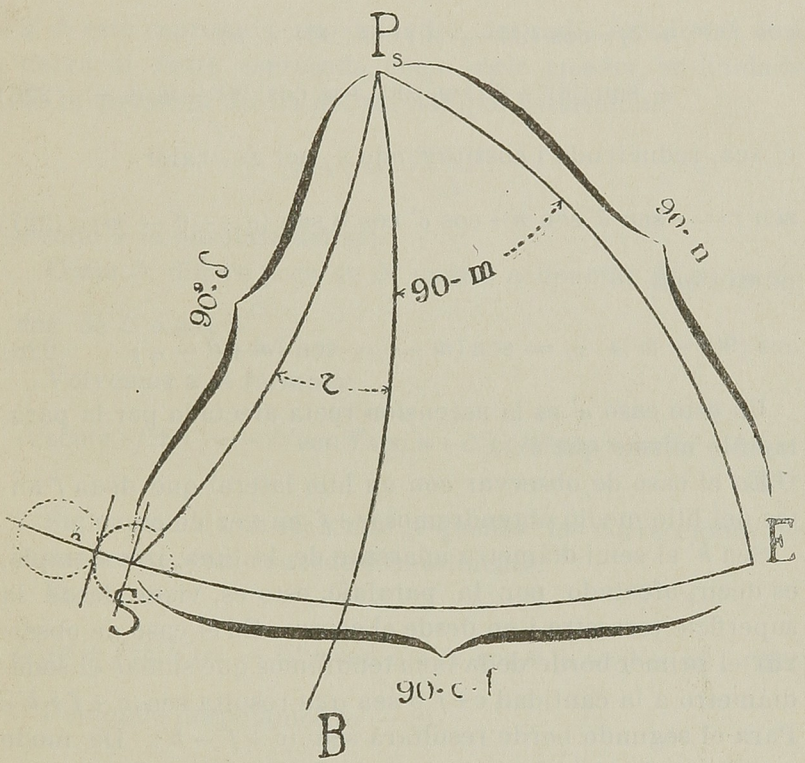

Figura 20.

Ademas

$$SE = 90^o + c$$

I suponemos que m, n, c sean positivos.

Sea θ el tiempo sideral de la observacion, entónces $\alpha' - \theta$ será el ángulo horario, negativo en este momento,

como suponemos que el objeto S se observa ántes del meridiano. Pondremos:

$$\tau = \alpha' - \theta \qquad (225)$$

Por otra parte:

$$P_s S = 90^o + \delta'$$

Del triángulo esférico SP_sE obtenemos:

$$\cos (90^o + c) = \cos (90^o + \delta') \cos (90^o + n)$$
$$+ \operatorname{sen} (90^o + \delta') \operatorname{sen} (90^o + n) \cos (90^o - m + \tau) \qquad (226)$$

o sea, reduciendo i sustituyendo τ por su valor

$$\operatorname{sen} c = - \operatorname{sen} \delta' \operatorname{sen} n + \cos \delta' \cos n \operatorname{sen} (\alpha' - \theta - m) \qquad (227)$$

puesto que

$$\cos (90^o - m + \tau) = \operatorname{sen} (m - \tau) = \operatorname{sen} (m + \theta - \alpha'). \qquad (228)$$

En este caso α' es la ascension recta afectada por la paralaje, lo mismo que δ'.

En el caso de observar con un hilo lateral que dista f ántes del hilo medio obtendremos $(c+f)$ en vez de c.

Sea h' el semi-diámetro aparente de la luna, por ejemplo, es decir, afectado por la paralaje, esto es, visto desde la superficie terrestre i no desde el centro. En el caso de observar el primer borde de la luna tendremos que sumar el semidiámetro a la cantidad $c+f$ o sea que resulta $\operatorname{sen} (c + f + h')$. Para el segundo borde resultará $\operatorname{sen} (c + f - h')$. De modo que si reunimos ámbos casos resulta la fórmula que considera el semi diámetro i la paralaje, que contiene $\operatorname{sen} (c + f \pm h')$.

Esto es:

$$\operatorname{sen} (c + f \pm h') = - \operatorname{sen} \delta' \operatorname{sen} n + \cos \delta' \cos n . \operatorname{sen} (\alpha' - \theta - m) \qquad (229)$$

En planetas pequeños en los cuales h' es chico por su distancia a la tierra solo se considera $\operatorname{sen} (c + f)$.

Para considerar el efecto de la paralaje en la fórmula, multiplicamos la ecuacion con $\triangle'$, que es la distancia del planeta al observador; si $\triangle$ es la distancia al centro de la tierra i p es la paralaje del objeto, sabemos que:

$$\text{sen } p = \frac{1}{\triangle} \qquad (230)$$

si $\triangle$ está espresado en unidades del radio ecuatorial de la tierra; si fuera espresado, como suele suceder, en unidades de la distancia media del sol hai que determinar:

$$\text{sen } p = \frac{\text{sen } \pi}{\triangle}$$

siendo π la paralaje del sol.

Como $\triangle'$ difiere poco de $\triangle$, vamos a denotar $\triangle'$ en unidades de $\triangle$ o sea $\frac{\triangle'}{\triangle}$.

Volvemos a la fórmula:

$$\triangle' \text{sen}(c+f\pm h') = -\triangle' \text{sen } \delta' \text{sen } n + \triangle' \cos\delta' \cos n \text{ sen}(\alpha' - \theta - m) \qquad (231)$$

Supongamos que sean mui pequeñas las correcciones del instrumento, como sucede jeneralmente.

Entónces:

$$\triangle' (c + f \pm h') = -\triangle' n \text{ sen } \delta' + \triangle' \cos\delta' (\alpha' - \theta - m) \qquad (232)$$

De donde despejamos $(\alpha' - \theta)$.

$$(\alpha' - \theta)\triangle' \cos\delta' = \triangle' n \text{ sen } \delta' + m \triangle' \cos\delta' + \triangle' (c+f\pm h') \qquad (233)$$

Ahora recordemos las ecuaciones (186) de la pájina 80 que dividimos por $\triangle$:

$$\left.\begin{aligned} \triangle' \cos\delta' \cos\alpha' &= \cos\delta \cos\alpha - \rho \text{ sen } p \cos\phi' \cos\theta \\ \triangle' \cos\delta' \text{ sen } \alpha' &= \cos\delta \text{ sen } \alpha - \rho \text{ sen } p \cos\phi' \text{ sen } \theta \\ \triangle' \text{ sen } \delta' &= \text{sen } \delta \quad - \rho \text{ sen } p \text{ sen } \phi' \end{aligned}\right\} \qquad (234)$$

De estas ecuaciones deduzcamos una fórmula para $(\alpha' - \theta)$. Para eso multiplicamos la primera por + sen θ i la segunda por — cos θ. Resultará, sumando ámbos productos:

$$\Delta' \cos \delta' \operatorname{sen} (\theta - \alpha') = \cos \delta \operatorname{sen} (\theta - \alpha) \qquad (235)$$

Como observamos mui cerca al meridiano $(\alpha' - \theta)$ será pequeño i por esto

$$(\alpha' - \theta) \Delta' \cos \delta' = (\alpha - \theta) \cos \delta \qquad (236)$$

Busquemos una espresion para $\Delta' \cos \delta'$. Para ello multiplicamos la primera de las ecuaciones (234) con cos α i la segunda con sen α i sumamos, resultará:

$$\Delta' \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha) = \cos \delta - \rho \operatorname{sen} p \cos (\theta - \alpha) \cos \phi'$$

Como $(\alpha' - \alpha)$ es tan pequeño, hacemos cos $(\alpha' - \alpha) = 1$, lo mismo cos $(\theta - \alpha) = 1$

o sea

$$\Delta' \cos \delta' = \cos \delta - \rho \operatorname{sen} p \cos \phi' \qquad (237)$$

La tercera de las ecuaciones (234) es

$$\Delta' \operatorname{sen} \delta' = \operatorname{sen} \delta - \rho \operatorname{sen} p \operatorname{sen} \phi' \qquad (234_3)$$

Cuadrando ámbas ecuaciones i sumando, se obtiene:

$$\Delta'^2 = 1 - 2 \rho \operatorname{sen} p \cos (\phi' - \delta) \qquad (238)$$

el término + $(\rho \operatorname{sen} p)^2$ se desprecia debido a la pequeñez de p.

Despejamos Δ', que será igual a una série infinita, cuyos dos primeros términos solo consideramos.

Tenemos entónces:

$$\Delta' = 1 - \rho \operatorname{sen} p \cos (\phi' - \delta) \qquad (239)$$

Reemplacemos, ademas, h' en funcion de h. Para esto sea C el centro de la tierra (fig. 21), A un punto sobre su superficie; sea C' el centro del astro considerado. Entónces, siendo h el ángulo bajo el cual se vé el radio del astro desde el centro de la tierra i h' el ángulo bajo el cual se vé desde la superficie, o sea desde A, tendremos:

$$\text{sen } h = \frac{R}{\triangle} \text{ i sen } h' = \frac{R}{\triangle'} \qquad (240)$$

o bien, como se trata de ángulos mui pequeños:

$$h \triangle = h' \triangle' \qquad (241)$$

o sea

$$h = h' \left(\frac{\triangle'}{\triangle} \right) \qquad (242)$$

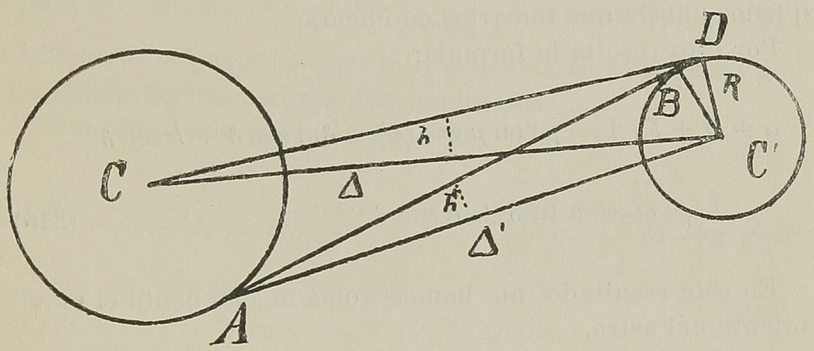

Figura 21.

Como $\triangle'$ está espresado en unidades de $\triangle$, obtendremos:

$$h' \triangle' = h \qquad (243)$$

Introduzcamos los valores de las ecuaciones (236), (234_3), (237), (239), (243) en la ecuacion (233):

$$(\alpha - \theta) \cos \delta = n (\text{sen } \delta - \rho \text{ sen } p \text{ sen } \phi') + m(\cos \delta - \rho \text{ sen } p \cos \phi')$$

$$+ (c + f) [\, 1 - \rho \text{ sen } p \cos (\phi' - \delta)\,] \pm h \qquad (244)$$

Despejando de esta ecuacion el valor de α se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \theta &+ f\,[\,1 - \rho \operatorname{sen} p \cos(\phi' - \delta)\,] \sec\delta \pm h \sec\delta \\ &+ m + n \operatorname{tg}\delta + c \sec\delta \\ &- m\,\rho \operatorname{sen} p \cos\phi' \sec\delta \\ &- n\,\rho \operatorname{sen} p \operatorname{sen}\phi' \sec\delta \\ &- c\,\rho \operatorname{sen} p \cos(\phi' - \delta) \sec\delta \end{aligned}\right\} \quad (245)$$

Estos tres últimos términos se desprecian cuando m, n, c son pequeños, que es lo que ocurre en instrumentos bien correjidos. Por ejemplo, en el caso de la luna, en el cual $\operatorname{sen} p$ es igual mas o menos $\frac{1}{60}$, m, n, c multiplicados por esa fraccion dan productos mui pequeños. Si no fueran pequeños habria que tomarlos en cuenta.

Por esto resulta la fórmula:

$$\alpha = \theta + f\,[\,1 - \rho \operatorname{sen} p \cos(\phi' - \delta)\,] \sec\delta \pm h \sec\delta$$
$$+ m + n \operatorname{tg}\delta + c \sec\delta. \quad (246)$$

En este resultado no hemos tomado en cuenta el movimiento del astro.

Supongamos que se observa con un hilo lateral i que el astro se mueve hácia el hilo medio.

Sea $\Delta\,\alpha$ el movimiento diario del cuerpo de que se trata, i como este movimiento diario se refiere al dia medio i queremos el movimiento del astro en un segundo sideral, recordaremos que

$$1 \text{ dia sideral} = 1 \text{ dia medio} + 3^m\,56^s$$

o sea

$$1 \text{ dia medio} = 86636 \text{ segundos siderales.}$$

Siendo λ el movimiento en un segundo sideral, será entónces:

$$\lambda = \frac{\triangle a}{86636}$$

El movimiento del astro es positivo cuando aumenta su ascension recta, o sea cuando tiende a contrarrestar el movimiento diurno. Ademas, λ tiene el mismo signo de $\triangle a$.

El astro se mueve en una unidad de tiempo por una unidad de tiempo, o sea en un segundo, se desplaza por el movimiento diurno de toda la esfera de un segundo; pero como ademas de este, está animado del movimiento propio λ en un segundo, su desplazamiento será entónces en esa unidad de $(1 - \lambda)^s$, si λ es positivo.

Para recorrer la distancia f^s se necesita entónces $\left(\frac{f}{1-\lambda}\right)^s$ i para el diámetro h^s necesita $\left(\frac{h}{1-\lambda}\right)^s$ i lo mismo sucede para recorrer el pequeño espacio que desvía el hilo medio del meridiano por los errores instrumentales.

De modo que la ecuacion final es:

$$\alpha = \theta + \frac{f}{(1-\lambda)\cos\delta}[1 - \rho \operatorname{sen} p \cos(\phi' - \delta)] \pm \frac{h}{(1-\lambda)\cos\delta} + \frac{m + n \operatorname{tg}\delta + c \sec\delta}{1-\lambda} \qquad (247)$$

en la cual se toma en consideracion todo, i que nos da el valor jeocéntrico de la ascension recta. Ademas de esto es menester fijar la época del pasaje del astro por el meridiano.

Para el caso de la luna, el gran Bessel en sus «Tabulae Regiomontanae» calculó tablas que dan los valores

$$\log [1 - \rho \operatorname{sen} p \cos(\phi' - \delta)]$$

con el argumento $\rho \operatorname{sen} p \cos(\phi' - \delta)$, i ademas, $\log \frac{1}{1-\lambda}$

con el argumento del movimiento de la luna en ascension recta en 12 horas.

$$\log \frac{1 - \rho \operatorname{sen} \pi \cos (\phi' - \delta)}{(1 - \lambda) \cos \delta} \quad \text{i} \quad \frac{h}{(1 - \lambda) \cos \delta}$$

para el Sol de dia a dia.

Siendo los valores para el Sol ménos variables que para la luna i casi idénticos para la misma fecha en diferentes años, es posible proporcionar para el Sol tablas sempiternas, miéntras que para la luna hai que entrar con sen p i δ de la efeméride.

Será menester calcular tales tablas cuando empecemos a hacer observaciones fundamentales de los cuerpos del sistema solar con el nuevo círculo meridiano de Espejo.

§ 34. *Aplicacion a una observacion meridiana del cometa Morehouse.* — Tal observacion tuvo lugar el 19 de Marzo de 1909. Los contactos se tomaron cuando el núcleo era dimidiado por los hilos.

Una efeméride aproximada del cometa nos da:

12^h T. M. de Berlin.

1909	α ap.	Dif.	δ ap.	Dif.
Marzo 18.5	$16^h\ 49^m\ 30^s$		$-\ 75^o\ 48'\ 50''$	
		$-16^m\ 7^s$		$-\ 52'\ 50''$
19.5	16 33 23		— 76 41 40	
		— 18 7		— 48 36
20.5	16 14 46		— 77 30 19	

Se observaron diversas estrellas fundamentales para encontrar las cantidades C_p, m, n. γ Apodis pasó por el hilo medio a las $16^h\ 18^m 53.^s592$ i su declinacion aparente para la época de la observacion vale $-\ 78^o\ 41'\ 24.''8$. Des-

pues pasó el cometa, la lectura del círculo da para su declinacion — 77° 3' 3". Despues siguió la estrella α Trianguli australis a las $16^h\ 38^m\ 29.^s491$ i con una declinacion aparente de — 68° 51' 29."5 despues ζ Arae a las $16^h\ 50^m\ 34.^s342$ en δ — 55° 50' 40."8. Por último culminó la estrella ι Apodis a las $17^h\ 11^m\ 24.^s02$ i cuya declinación aparente era — 70° 1' 29".6.

Como el cometa estaba mui débil no fué posible tomar todos los hilos de los grupos i aun hubo grupos completos que se perdieron miéntras se hacia las punterías en declinación.

En suma, los hilos observados son:

III_1	16^h	24^m	$40.^s98$
III_2			52.38
V_1		27	50.38
V_2		28	2.66
V_3			18.20
V_4			32.14
V_5			45.77

Para reducir al hilo medio necesitamos las distancias ecuatoriales de los hilos, considerados al hilo medio.

Anotamos luego sus logaritmos.

De	III_1	0.30219
»	III_2	0.56937
»	V_1	1.55944
»	V_2	1.58806
»	V_3	1.61909
»	V_4	1.65690
»	V_5	1.68020

De la última conferencia sabemos que la reduccion al hilo medio de un astro que se mueve es:

$$\frac{f}{(1 - \lambda) \cos \delta}$$

Como el movimiento cambia de un dia a otro, de momento a momento, necesitamos conocer la época del pasaje del cometa por el hilo medio para interpolar partiendo de las fechas en que ese movimiento es dado por la efeméride.

Para el Marzo 19.0 tal movimiento vale 967^s

» » » 20.0 » » » 1117^s

Para la época de la observacion interpolamos, pero no sabemos exactamente el tiempo del pasaje por el hilo medio; pero podemos considerarlo segun un cálculo previo a las $16^h\ 25^m\ 12^s$ con un error de mas o ménos un segundo.

Para obtener el instante del pasaje por el meridiano tenemos que hacer la correccion por $m + n \operatorname{tg} \delta + c \sec \delta$. La correccion que hai que agregar vale como despues veremos $+ 34^s$. De manera que el pasaje por el meridiano se verificó a las $16^h\ 25^m\ 46^s$ tiempo sideral de Santiago. Debemos cambiar esta época en tiempo medio.

Para esto tenemos:

Tiempo sideral de la observacion....	16^h	25^m	46^s
Tiempo sideral al mediodia medio..	23	46	20
Diferencia.....	16	39	26
Reduccion a tiempo medio.....	—	2	44
Tiempo medio de Santiago	16	36	42
Reduccion a Berlin.....	5	36	21.2
	22	13	3
Conversion en fraccion de dia		$19.^d9257$	

Interpolamos con la fraccion $19.^d9257$ entre los movimientos para $19.^d0$ i $20.^d0$ i obtenemos como movimiento a la época del pasaje del cometa $— 1106^s$.

Para calcular λ necesitamos el movimiento en un segundo. El dia medio tiene 86636 segundos siderales; por lo tanto:

$$\lambda = — \frac{1106^s}{86636}$$

Hagamos el cálculo:

$$\begin{aligned} \log\ 1106 &= 3.04376 \\ \log\ 86636 &= 4.93770 \\ \hline \log \lambda \quad &= 8.10606\, n \end{aligned}$$

Ahora buscamos $\log (1 - \lambda)$ usando las tablas gaussianas. Log 1 vale 0.00000; restamos el menor del mayor, nos da 1.89394. Con este logaritmo buscamos en la tabla i obtenemos 0.00551 que segun las prescripciones de la tabla debemos agregar al mayor de los logaritmos o sea a 0.00000. El resultado es el logaritmo de $(1 - \lambda)$, nos da:

$$\begin{aligned} \log (1 - \lambda) &= 0.00551 \\ \log \cos \delta &= 9.35041 \\ \hline \log (1 - \lambda) \cos \delta &= 9.35592 \end{aligned}$$

El valor de δ que aquí sirve es el obtenido por la lectura de los círculos en el momento de la culminacion i correjido por los influjos de refraccion i error del punto cero del círculo.

Ahora restamos el logaritmo encontrado de todos los logaritmos de f, pues queremos:

$$\log \frac{f}{(1 - \lambda) \cos \delta}.$$

Así obtenemos:

1.47627
1.21345
2.20352
2.23214
2.26317
2.30098
2.32428

Los números correspondientes los escribimos al lado de los tiempos observados para obtener el hilo medio:

16^h	24^m	$40.^s98$	+ 0^m	$29.^s94$
		52.38	+ 0	16.35
	27	50.38	— 2	39.78
	28	2.66	— 2	50.67
		18.20	— 3	3.30
		32.14	— 3	19.98
		45.77	— 3	31.00

Para los hilos III_1 i III_2 que están ántes del hilo medio agregamos la correccion obtenida al tiempo observado. Lo contrario ocurre con los hilos V_1 — V_5 .

Así se obtienen como pasajes al hilo medio:

16^h	25^m	$10.^s92$
		8.73
		10.60
		11.99
		14.90
		12.16
		14.77

cuya poca concordancia se esplica por la vision difusa del cometa i por la incertidumbre en los contactos debida a la declinacion tan austral de casi — 80°.

El promedio, que será exacto al medio segundo, nos da:

16^h 25^m $12.^s01$

En esta reduccion al hilo medio se ha suprimido el término $1 - \rho \operatorname{sen} \pi \cos (\phi' - \delta)$ de la fórmula, porque como sen π es tan pequeño, todo el término se considera como la unidad.

Veamos, en efecto, si π es tan pequeño.

De la efeméride sacamos log $\triangle_{Com.} = 0.1071$.

Para el sol cuya distancia a la tierra $\triangle_{Sol}$ vale la unidad, se tiene log $\triangle_{Sol} = 0.00000$.

Ahora bien, como $\pi_{Sol} = 8.''80$ la paralaje del cometa que dista mas que el sol de la tierra, será menor que 8.''80.

Sabemos que $\pi_{Sol} . \triangle_{Sol} = 8.''80$ i para el cometa $\pi_{Com.} \triangle_{Com.}$ es la misma constante 8.''80 i obtengo entónces $\pi_{Com.} = 6.''88$ i el sen $\pi_{Com.}$ = mas o ménos $\frac{1}{30000}$ i el factor es de efecto casi nulo en el término de que estamos tratando; pues, salvo el caso de la luna, ρ sen π cos $(\phi' - \delta)$ casi siempre se puede despreciar.

Para seguir con los cálculos, debemos saber por observaciones anteriores el valor de la colimacion disminuida por la aberracion diaria, o sea $(c - \kappa)$.

En este caso:

$$c - \kappa = + 0.^{s}555$$

Primero corrijo la observacion por $(c - \kappa)$ sec δ i eso vale:

Para γ Apodis	+ 2.^{s}830
» el cometa	(+ 2.473)
» α Trianguli	+ 1.539
» ξ Arae	+ 0.989
» ι Apodis	+ 1.625

El valor de $(c - \kappa)$ para el cometa se ha colocado dentro de un paréntesis porque no es el valor definitivo, puesto que el pasaje del cometa por el hilo medio debe correjirse por:

$$\frac{m + n \text{ tg } \delta + (c - \kappa) \text{ sec } \delta}{1 - \lambda}$$

Elejimos para determinar n las dos estrellas mas distantes en declinacion, γ Apodis i ξ Arae.

La estrella γ Apodis pasa por la línea de colimacion a las $16^h\ 18^m\ 56.^s422$ i ζ Arae a las $16^h\ 50^m\ 35.^s331$ si agregamos a los tiempos observados las correcciones ántes espresadas.

Ademas, las correcciones rectas de ámbas estrellas son:

γ Apodis: $16^h\ 19^m\ 29.^s09$

ζ Arae: 16 51 5.09

La diferencia entre el pasaje correjido i la ascension recta aparente se compone de:

$$C_p + m + n \operatorname{tg} \delta$$

i escribamos luego en vez de tg δ su logaritmo respectivo:

Para γ Apodis: $C_p + m + n\,[0.6990_n] = + 32.^s668$

» ζ Arae: $C_p + m + n\,[0.1685_n] = + 29.^s759$

Restando:

$$+ n\,[0.5473_n] = + 2.^s909$$

que se obtiene usando tablas gaussianas. Log 2.909 = 0.4637, de modo que:

$$\log n = 9.9164_n$$

Ahora agregamos a cada estrella n tg δ. Tenemos para:

γ Apodis	+ 4.^{s}125
Cometa	(+ 3.588)
α Trianguli	+ 2.133
ζ Arae	+ 1.216
ι Apodis	+ 2.269

Si ahora al pasaje por el hilo medio agregamos la correccion por colimacion i la por n tg δ, resulta para:

				α aparente:		
γ Apodis:	16^h	19^m	$0.^s547$	16^h	19^m	$29.^s09$
α Trianguli:	16	38	33.163	16	39	1.45
ζ Arae:	16	50	36.547	16	51	5.09
ι Apodis:	17	11	27.914	17	11	56.31

Al lado de estos valores hemos escrito la ascension recta aparente. Ahora si restamos los pasajes ya correjidos de α aparente, debemos obtener $C_p + m$ i encontramos para:

γ Apodis	+ $28.^s543$
α Trianguli	+ 28.287
ζ Arae	+ 28.513
ι Apodis	+ 28.396

que nos da buena concordancia en vista de las declinaciones altas de las estrellas.

Solamente tres determinaciones de $C_p + m$ son independientes, debiendo concordar γ Apodis i ζ Arae, de las cuales sacamos el valor de n.

El promedio de los tres independientes valores de $C_p + m$ es + $28.^s409$.

Si agregamos $C_p + m$ obtenemos la ascension recta aparente para las estrellas, pero no para el cometa, pues para éste tenemos que calcular con:

$$\frac{m + n \text{ tg } \delta + c \text{ sec } \delta}{1 - \lambda}.$$

Ahora calculamos m por la fórmula resultando de (17):

$$m = \beta \text{ sec } \phi - n \text{ tg } \phi \qquad (248)$$

en que β es la inclinacion dada por la burbuja del nivel i n el valor obtenido de los cálculos.

$\beta = +\ 6.5$ partes, una parte $= 0.^{s}0584$, pues

$\beta = +\ 0.^{s}3796$

Obtenemos para m el valor:

$$m = -\ 0.^{s}090$$

que casualmente en este caso es mui pequeño.

Como $C_p + m = +\ 28.^{s}409$

será $C_p = +\ 28.^{s}499$

Para hacer la correccion del cometa formemos la suma del numerador:

$m + n \operatorname{tg} \delta + (c - \kappa) \sec \delta$

$m = -\ 0.^{s}090$

$n \operatorname{tg} \delta = +\ 3.588$

$(c - \kappa) \sec \delta = +\ 2.477$

Suma $+\ 5.975$

i dividimos por $(1 - \lambda)$:

log suma $= 0.77634$

log $(1 - \lambda)$ $= 0.00551$

0.77083

i el número correspondiente es $+\ 5.^{s}900$.

Ahora obtenemos la posicion del cometa en esta forma:

El pasaje observado al hilo medio fué $16^h\ 25^m\ 12.^s01$.

El valor de C_p es $+\ 28.^s499$.

La correccion $\dfrac{m+n\ \text{tg}\ \delta+(c-\kappa)\ \text{sec}\ \delta}{1-\lambda} = +\ 5.^s900$.

I sumando todo esto resulta: $16^h\ 25^m\ 46.^s41$,

que será la ascension recta obtenida por la observacion meridiana.

Despues trataremos como se calcula la declinacion. Esta ascension recta corresponde a un reloj sideral sin error, es decir, que el 19 de Marzo de 1909 a las $16^h\ 25^m\ 46.^s41$ de tiempo sideral de Santiago pasó el cometa Morehouse en su viaje contínuo por el espacio por la ascension recta aparente de $16^h\ 25^m\ 46.^s41$. Pero corresponden las $16^h\ 25^m\ 46.^s41$ de tiempo sideral de Santiago a $16^h\ 36^m\ 42.^s46$ de tiempo medio de Santiago, de manera que eran las $4^1/_2$ A. M. del dia civil del 20 de Marzo i al mismo tiempo el reloj de Berlin marcaba las $22^h\ 13^m\ 4^s$ qué tiempo nos servirá para comparar la posicion del cometa con la efeméride referida a dicho meridiano, si se toma en cuenta el «tiempo de la luz», que esplicaremos mas detalladamente tratando de observaciones ecuatoriales.

II. El círculo vertical

§ 35. *Lectura de los círculos.*— La reunion en un solo instrumento del círculo vertical i del anteojo de pasos es invencion del siglo pasado. Antes de esto se determinaba las declinaciones con los círculos verticales que consisten en un gran círculo colocado en un plano vertical dividido en grados i fracciones de grado. Un anteojo colocado segun un diámetro del círculo es el que sirve para ver las estrellas, i ademas, lleva alidadas para leer en el círculo.

Con el círculo meridiano moderno, que reune las propiedades de ámbos instrumentos i que ahora se usa con preferencia, se pueden tomar las declinaciones con mucha exactitud.

Lo primero es estudiar el número de divisiones del círculo. Así, por ejemplo, el artista que divide el círculo lo hace en 360 partes, o sea grados enteros, i cada grado es dividido segun los divisores de 60; así puede ser 12 × 5 o 20 × 3 o 30 × 2. Es mejor la division 12 × 5, porque así contendrá el círculo un trazo mui largo para 30', dos para 15' i 45', los cuales pueden tener menor lonjitud pero mas que los restantes i así se hace mui fácil la lectura de un espacio no numerado del círculo con solo fijarse en la lonjitud de los trazos.

Como se comprende, el número de trazos está limitado a cada círculo segun su diámetro; en aquellos de pequeño diámetro alcanza la divisibilidad solo hasta grados enteros, en

los grandes va mas léjos. Con esto se puede pensar en que grandes círculos darán mayor exactitud, por cuanto podrán contener divisiones de mui pequeños ángulos; pero no es así, puesto que la temperatura i la flexion influyen tanto mas en los círculos e introducen errores en las lecturas cuanto mayor es el diámetro.

Para leer los ángulos en el círculo se usa una *alidada* o punto de referencia, por ejemplo, en el caso del círculo vertical tal referencia está en la interseccion del círculo vertical con la lámina que lleva el anteojo.

En los instrumentos astronómicos sencillos hai alidadas cuya forma mas simple es una marca o señal fija o movible, estimándose las subdivisiones.

En los círculos divididos con mas prolijidad es preciso

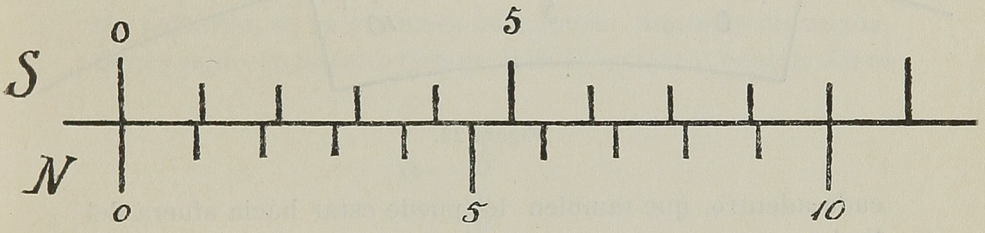

Figura 22.

aumentar la exactitud de las lecturas. Esto se consigue primero adaptando al círculo un sencillo aparato para apreciar divisiones mas chicas que las indicadas, un nonio, inventado por Nonius, latin de Núñez; el mismo aparato se atribuye a Vernier i de aquí las dos palabras con que se llama, nonio, vernier.

La division superior S está en el limbo principal del círculo (fig. 22) el cual se mueve miéntras el nonio N permanece fijo i por esto su punto cero reemplaza a la alidada. Lo esencial en un nonio es que $n + 1$ divisiones de él correspondan a n divisiones del limbo del círculo.

BIBLIOTECA NACIONAL
SECCION CHILENA

Por ejemplo, si 0 del nonio corresponde a 10.6 del círculo, 10 del nonio corresponderá a 19.6 del círculo. Una division del nonio es entónces $\frac{9}{10}$ de una del círculo. Es decir, cualquier nonio debe cumplir con las condiciones de:

$$(n + 1)^{\text{div. nonio}} = n^{\text{div. princip.}}$$

Supongamos un círculo dividido en grados i en él unas divisiones 30° 35° 40° 45°. La alidada en la fig. 23 está colo-

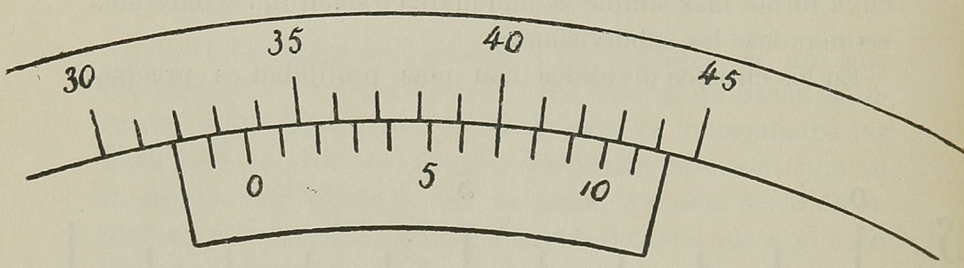

Figura 23.

cada adentro, que tambien lo puede estar hácia afuera del limbo.

Sea n el nonio con el cual vamos a leer en el círculo; leemos ya 33° i nos falta aproximar con el nonio. Para esto vemos cuál trazo del nonio coincide con uno del círculo: resulta el trazo 7 que lo hace con 40 del círculo; entónces la lectura será 33.°7, porque ya sabemos que cada espacio comprendido entre dos trazos del nonio es $\frac{1}{10}$ mas chico que cada uno del limbo principal; o sea, las 7 divisiones del nonio serán 7/10 menores que 7 del círculo; i la diferencia entre las 7 divisiones del nonio i las 7 del círculo es cabalmente el pequeño espacio entre el grado 33 i el 0 de la alidada. Por lo tanto ese espacio vale 7/10 de grado.

En el nuevo ecuatorial Heyde que se instalará en Espejo hai un círculo de posicion que está dividido en grados

i que se habria podido aproximar segun costumbre con el nonio hasta un minuto; pero me pareció mucho mejor, sobre todo en observaciones de estrellas dobles, que las mas pequeñas divisiones sean centésimos de grado i para lo cual el artista ha dividido el grado en cuatro partes i ha colocado un nonio de 25 divisiones de igual largo a 24 del limbo principal; así se obtienen por el nonio centésimos de grado.

Las dos divisiones que se acostumbra trazar ántes del 0 i despues del fin del nonio solo sirven para verificar las coincidencias de los trazos 0 i del último. Para asegurar la exactitud de las coincidencias se emplea una lupa.

Los *microscopios* permiten obtener entónces mucha mas exactitud en la lectura de los limbos graduados de los instrumentos de precision, por ejemplo, en nuestro círculo meridiano.

Si se usan microscopios colocados mirando el limbo del círculo, se consigue aumentar los trazos i sus intervalos, sin embargo, se ve entónces un número limitado de trazos, por ejemplo, en nuestro círculo meridiano tres o cuatro. En el

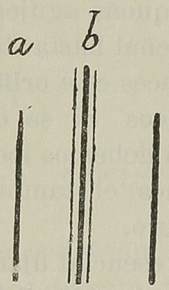

Figura 24.

plano focal del microscopio hai un par de hilos de araña colocados en un marquito que se mueve por un tornillo esterior provisto de un tambor que señala las fracciones de las vueltas completas. Así colocado el microscopio, pueden verse limpios al mismo tiempo el círculo i los hilos. El fin de los hilos por parejas está en que se pueda colocarlos de tal manera que incluyan un trazo del círculo, cuyos bordes deben

estar simétricos con respecto a los hilos, tal como lo indica la fig. 24. Ya hemos dicho que los trazos se distinguen entre sí por su lonjitud a fin de evitar confusiones en las lecturas; solo los constructores de círculos graduados modernos pueden inscribir en cada trazo el grado i minuto correspondientes. Por ejemplo, en la fig. 24 se ve que no habrá lugar a ciertos errores de lectura si se considera una porcion graduada, sin ver los números, pues se ve como un trazo puede designar solo diversos números que difieren de 15 minutos enteros, por ejemplo, el trazo *a* puede ser 10, 25, 40, 55, el trazo *b* puede valer 15, 30, 45, 60 i, como se comprende, es imposible incurrir en otro error que de 15 minutos, que no perjudica, ya que se sabe jeneralmente de antemano la declinacion de la estrella con el minuto de aproximacion.

Hai tambien en el campo de vision del microscopio un peine o lámina dentada en su borde, de suerte que cinco dientes equivalen al espacio de dos trazos consecutivos, o sea, los dientes distan entre sí de un minuto. Ademas, como punto de referencia para las lecturas micrométricas, tiene la lámina del peine un pequeño agujero, que hace las veces de alidada, esto es, la señal hasta la cual debe leerse el círculo; corresponde entónces este orificio al cero del nonio en instrumentos mas chicos. Si se coloca un par de hilos simétricamente al agujero debemos leer en el tambor cero, i en caso contrario, jiramos el tambor sobre su eje hasta hallar la lectura exacta cero.

Para leer el tambor es esencial fijarse como marchan las lecturas cuando se mueven los hilos hácia un trazo que *precede* de la graduacion; en este caso tales lecturas deben crecer, i es esta una condicion mui importante para aliviar la operacion de leer con facilidad.

Veamos un ejemplo: se quiere hacer la lectura indicada por la fig. 25 en que la flecha indica en qué direccion crecen las lecturas del tambor.

Hasta el trazo precedente contamos 103° 15', ahora agregamos los intervalos iguales a la distancia de dos dientes que valen un minuto cada uno, son tres, i en seguida,

contamos el resto con el tornillo micrométrico moviendo la pareja de hilos desde el agujero 0 hasta el trazo que precede, vemos que las vueltas del tambor desde 0 hasta el trazo 15 son 3 i en las fracciones de vuelta leemos 47.8; si está dividido en 60 partes el tambor dará segundos de arco i sus décimos. De modo que tenemos como lectura:

$$103^{o}\ 15' + 3'\ 47.''8 = 103^{o}\ 18'\ 47.''8$$

Tambien se podria haber llevado la pareja de hilos desde el agujero 0 hasta el trazo que sigue, pero habríamos tenido que dar signo ménos a la lectura del tambor porque ahora

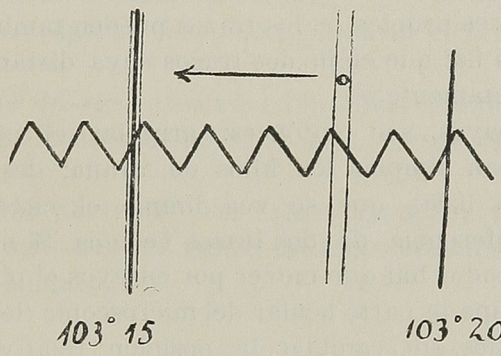

Figura 25.

decrecen los indicaciones del tambor con el movimiento del tornillo; puede habernos dado tal lectura — 1' 11.''5 i la segunda manera de leer nos da:

$$103^{o}\ 20' - 1'\ 11.''5 = 103^{o}\ 18'\ 48.''5$$

Puede hacerse dos lecturas como las ya anotadas para un mismo ángulo i tomar el promedio, para obtener mayor exactitud. Sin embargo, no es preciso colocar ántes la pareja de hilos sobre el agujero por cuanto el tambor, en esta

posicion de los hilos, marca cero. Entónces basta mover los hilos a los trazos i contar los dientes del peine.

§ 36. *El run.*—Las lecturas que resultan no están exentas de errores. Primeramente hai que ver los hilos i trazos con gran limpieza, i en caso contrario, enfocar bien el ocular, la otra manipulacion es mover el objetivo, lo que hace cambiar el aumento, i por lo tanto, la distancia entre los trazos; entónces hai que proceder por ensayos hasta tener el aumento justo para que la distancia entre dos trazos consecutivos equivalga a cinco revoluciones del tambor; esto se determina coincidiendo primero la pareja de hilos con un trazo i en seguida moviendo los hilos hasta el otro trazo; debe haber entre ámbas lecturas una diferencia de cinco minutos cabales.

Los errores propios de los trazos pueden tambien ser considerables i hai que elejir dos trazos cuya distancia es sabida ser exactamente 5'.

Los ensayos son entónces: arreglar el ocular hasta que se vean limpios los hilos de araña; despues poner el objetivo hasta que se vea limpio el círculo i determinar la diferencia de dos trazos vecinos. Si no coinciden en los segundos hai que mover por ensayos el objetivo i al mismo tiempo la parte ocular del microscopio (lente i marco con los hilos, sin cambiar la posicion relativa de estos entre sí), hasta que coincidan las lecturas del tambor con los trazos. Por ejemplo, se obtiene las lecturas del tambor para dos trazos seguidos 47."8 i 58."3; movemos el objetivo i la parte ocular i del nuevo ensayo se obtiene 48."5 i 53."2, vemos que la diferencia anterior de 10."5 se redujo a 4."7, o sea 5."8 ménos i que un movimiento del objetivo de un poco ménos que ántes la reducirá a cero, i así por ensayos repetidos se puede obtener una diferencia bastante pequeña, que es lo que se denomina el *run*, si se resta la lectura del trazo que precede en la graduacion de aquel que sigue.

Los errores que pueden resultar son varios.

1.º Veamos que existe *error accidental* para cada observador, puesto que al colocar los hilos sobre el trazo puede estar

éste asimétrico con respecto a los hilos. Otro observador no incurrirá en los mismos errores de apreciacion, i con un gran número de observaciones se destruyen los errores accidentales; segun la teoría de las probabilidades el promedio de todas las observaciones afectadas de tales errores accidentales será mui cercano al verdadero. Es lo mismo que es la suerte de dados; si se arrojan dados, i se cuentan las pintas que resultan en su cara superior, i agregamos muchísimas veces este procedimiento, la suma total de las pintas, dividida por el número de veces que han sido arrojados los dados, dará un número casi constante, es decir, 3.5.

2.º El *error de trazo* consiste en colocacion inexacta de él por el constructor del instrumento i cada observador al colocar los hilos está obligado a cometer ese error. Solo por observaciones especiales se puede conocer el error propio del trazo.

3.º *El error del run* consiste en la diferencia de lecturas de dos trazos cercanos debido a la mala disposicion del microscopio.

Para el error del *run* observamos un gran número de diferencias entre diversos trazos cercanos i tomamos el promedio, por ejemplo:

$$
\begin{array}{r}
+\ 0.''7 \\
+\ 1.3 \\
+\ 0.4 \\
-\ 0.3 \\
+\ 0.5 \\
\hline
\end{array}
$$

El promedio $+\ 0.''52$, si descansare a lo ménos sobre 50 observaciones, puede considerarse libre del error accidental i de los errores de los trazos i obtenemos entónces el verdadero *run*.

Si los hilos se mueven hácia adelante el tambor da lecturas que disminuyen; si la pareja se mueve hácia el trazo precedente suben las lecturas i si se mueve hácia el trazo de mayor valor numérico disminúyen las lecturas sobre el

tambor. Con un ejemplo veamos lo que es *run positivo*: si colocamos la pareja de hilos en el trazo 15 de la fig. 24 obtenemos en el tambor una lectura 47."8 i si ahora colocamos los mismos hilos en el trazo 20 conseguimos en el tambor 48."5; ahora bien, como las lecturas en el tambor disminuyen cuando los hilos van de menor a mayor trazo, quiere decir entónces, que obteniendo la lectura final 48."5 no hemos alcanzado a jirar el tornillo 5 veces enteras, sino que faltan 0."7 hasta completar la quinta vuelta. Sin embargo, hemos medido dos trazos que distan 5', i el tornillo nos da por eso solo 5 vueltas — 0.7 o sea 299.3 divisiones, que corresponden a 300". Una division es pues mayor que un segundo i por eso hablamos aquí de un *run positivo*.

Vamos a nombrar mas jeneralmente r el run. Si hacemos pasar la pareja de hilos de un trazo al próximo, recorre el tornillo 5 vueltas ménos r, si r es positivo. Cinco vueltas son 300", si cada division vale 1"; pero para hacer recorrer el hilo cinco minutos entre los trazos el tambor solo ha hecho 5 vueltas — r divisiones o sea 300 — r divisiones. Un run positivo será dado pues por la ecuacion:

$$(300 - r) \text{ divisiones} = 300''$$

Obtendremos:

$$1 \text{ division} = \frac{300''}{300 - r}$$

Para cambiar las divisiones falsas en segundos verdaderos hai que multiplicarlas con este factor, que es mayor que 1; el run positivo indica pues que hai divisiones demasiado grandes i el número de divisiones leido es menor que los segundos respectivos.

Convirtamos la lectura en segundos; leíamos:

$$3 \text{ vueltas} + 47.8 \text{ divisiones} = 227.8 \text{ divisiones}$$

Entónces el valor en segundos es:

$$227.8 \times \frac{300}{300 - r}$$

Como r debe siempre ser un número pequeño podemos escribir:

$$227.8 \frac{1}{1 - \frac{r}{300}} = 227.8 \left(1 + \frac{r}{300} \right)$$

o sea

$$227.8 + 227.8 \frac{r}{300}$$

Es preferible en la práctica calcular el run con números mas chicos. Si espresamos con r el run para 5', $\frac{r}{5}$ será el run para 1'.

Hagamos:

$$\rho = \frac{r}{5}$$

Tendremos que reducir entónces la lectura a minutos i en vez de calcular la correccion por run: 227.''8. $\frac{r}{300}$ escribimos 3.'8. ρ, que nos permite un cálculo mucho mas sencillo.

En el círculo meridiano de Santiago que tiene 6 microscopios, distantes uno del otro de 60° se usan en las observaciones de zona solo dos microscopios opuestos que llamaremos I i II.

El microscopio I dará un run r_1, i el II un run r_2 .

Por ejemplo, el I da la lectura:

$$\left.\begin{array}{r} 103^{o}\ 18'\ 47.''8 \\ 48.5 \end{array}\right\} 103^{o}\ 18'\ 48.''15$$

i el II dará:

$$\left.\begin{array}{r} 103^{o}\ 18'\ 52.''6 \\ 51.7 \end{array}\right\} 103^{o}\ 18'\ 52.''15$$

Promedio jeneral $103^{o}\ 18'\ 50.''15$
$= 103^{o}\ 15' + 3.'84$

En el caso del microscopio II el run es negativo, i — 0.''9.

El procedimiento natural seria correjir cada microscopio por su run; pero como luego calculamos con el promedio jeneral, vemos que tambien se puede correjir la observacion por el promedio de los runs.

Así:

$$\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{\frac{r_1}{5} + \frac{r_2}{5}}{2} = \frac{r_1 + r_2}{10}$$

Por ejemplo, tenemos la suma de los run + 0.''7 — 0.''9 (puesto que muchas determinaciones confirmasen estos números) = — 0.''2, que da el run por minuto — 0.''02, multiplicado por 3.'84 resulta — 0.''08, que aplicado al promedio arriba anotado da su valor correjido $103^{o}\ 18'\ 50.''07$.

Si observáramos con trazos de errores ya conocidos bastaria determinar algunas veces la diferencia de las punterias de esos trazos i correjirla de la diferencia de los errores conocidos, en lugar de calcular el run usando muchísimos trazos o sea todas las estrellas de una zona. El run puede cambiar de una noche a otra, a causa de pequeños cambios de distancia del círculo al objetivo del microscopio. Cuando el círculo se acerca a los microscopios se obtendrá un run mas negativo que ántes; lo contrario cuando se aleja.

§ 37. *Error de escentricidad.*—La cuestion que contemplamos surje si suponemos que el círculo no jira en torno de su centro jeométrico, pero si alrededor de otro punto. Supongamos un círculo de centro C (fig. 26) i sea C' el centro de jiracion del círculo; si leemos entónces un ángulo cuyo arco está mas cerca del centro de jiracion, obtendremos sobre el círculo un valor menor que el verdadero; por ejemplo, el ángulo leido en el círculo ACB es menor que el ángulo $AC'B$ que corresponde a la jiracion ejecutada. Como se comprende, lo contrario sucede para un arco mas distante del centro de jiracion que del jeométrico; ese arco dará un ángulo mayor que el verdadero. La misma cosa sucede cuando

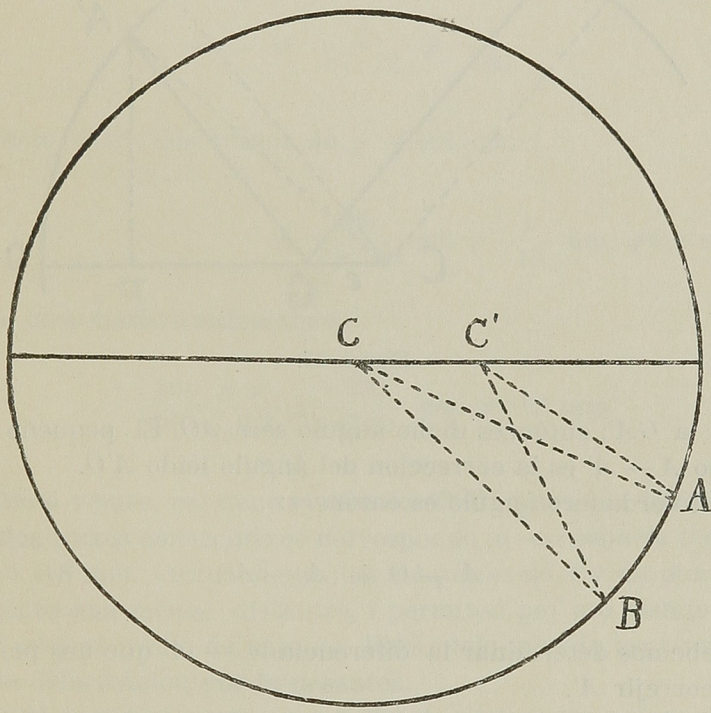

Figura 26.

la alidada no pasa por el centro jeométrico; en este caso los estremos opuestos de la alidada dan lecturas cuya diferencia no es 180°, como sucederá si tales estremos pertenecen a una cuerda del círculo.

Trataremos de encontrar una espresion para los errores que contemplamos. Sea C el centro jeométrico i G el de jiracion (fig. 27), CG será la línea de los centros que cortará la circunferencia en O, único punto cuya lectura no será afectada por el error en consideracion; para otro punto A' será $A'O$ el ángulo leido en el círculo. El ángulo verdadero $A'GO$ que corresponde a la jiracion efectuada de O hasta A' se tendrá trazando por el centro jeométrico C la paralela

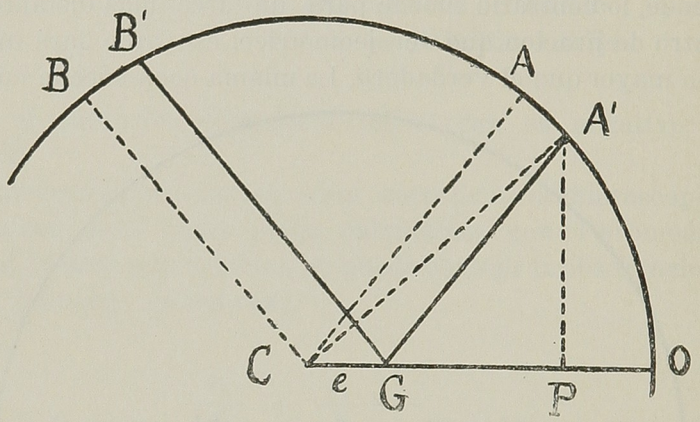

Figura 27.

CA a GA'; entónces dicho ángulo será AO. El pequeño ángulo $A - A'$ es la correccion del ángulo leido $A'O$.

El verdadero ángulo es entónces:

$$A' - O + (A - A')$$

i debemos determinar la diferencia $A - A'$ que nos permite correjir A'.

Vamos a buscar la lectura del círculo que corresponde al punto O, o sea, a la línea que une ámbos centros. La distancia de los puntos C i G la llamamos escentricidad i la designamos por e.

Pero ántes de entrar en tal determinacion voi a agregar algunas palabras sobre las relaciones lineales i angulares

del círculo. Es conveniente que el radio del círculo sea lo menor posible a fin de evitar la deformacion del círculo, puesto que la pesantez tiende a achatarlo de arriba abajo, a ponerlo elíptico. Por ejemplo, el círculo meridiano nuestro tiene un diámetro de 105 cm., i es algo grande; la menor division corresponde a 5', i veamos a qué espacio lineal es igual el arco de 5' comprendido en el limbo entre dos trazos consecutivos:

$$\text{sen } 1^{o} \neq \frac{1}{57}$$

$$\text{sen } 5' \neq \frac{1}{57.12} \neq \frac{1}{700}$$

espacio entre dos trazos de 5' distancia:

$$\neq \frac{105}{2 \times 700} \text{cm.} \neq \frac{1}{13} \text{ cm.} \neq 0.8 \text{ mm.}$$

o de otra manera calculamos:

$$\frac{105 \times \pi}{360 \times 12} \neq \frac{330}{4320} \text{ cm.} \neq 0.8 \text{ mm.}$$

Como vemos, contiene el círculo 4320 trazos i la distancia de dos trazos consecutivos corresponde a un espacio lineal de = 0.8 mm. Actualmente las máquinas de dividir dan divisiones aun ménos distantes, i permiten por eso disminuir aun mas el radio del círculo librándolo mas de los efectos de la deformacion por la pesantez.

Es fácil ver que en un gran círculo se pueden trazar mucho mas divisiones que en uno de pequeño radio i aumenta con eso la exactitud de las lecturas; pero al mismo tiempo crece la deformacion del círculo e introduce errores por tal motivo.

Ahora seguiré con la determinacion de los errores de escentricidad.

Tracemos desde A' la perpendicular a GG. En el triángulo $A'PG$ tenemos:

$$A'P = A'G \text{ sen } (A - O) \qquad (252)$$

i en el triángulo $A'PC$ resulta:

$$A'P = r \text{ sen } (A' - O) \qquad (253)$$

Ademas:

$$\left.\begin{aligned} GP &= A'G \cos (A - O) \\ GP &= r \cos (A' - O) - e \end{aligned}\right\} \qquad (254)$$

Tenemos así las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} A'G \text{ sen } (A - O) &= r \text{ sen } (A' - O) \\ A'G \cos (A - O) &= r \cos (A' - O) - e \end{aligned}\right\} \qquad (255)$$

Para determinar de estas ecuaciones el valor $A - A'$, que nos interesa, multiplicamos la primera por cos $(A' - O)$ i la segunda por — sen $(A' - O)$ i sumamos; resulta:

$$A'G \text{ sen } (A - A') = + e \text{ sen } (A' - O) \qquad (256)$$

Para encontrar cos $(A - A')$ multiplicamos la primera de las ecuaciones (255) por sen $(A' - O)$ i la segunda por cos $(A' - O)$ i sumamos:

$$A'G \cos (A - A') = r - e \cos (A' - O) \qquad (257)$$

Dividimos (256) por (257) i tenemos:

$$\text{tg } (A - A') = \frac{e \text{ sen } (A' - O)}{r - e \cos (A' - O)} \qquad (258)$$

En el segundo miembro dividimos numerador i denomi-

nador por r a fin de poder desarrollar la funcion tg $(A - A')$ en una série:

$$\text{tg}\,(A - A') = \frac{\frac{e}{r}\,\text{sen}\,(A' - O)}{1 - \frac{e}{r}\cos\,(A' - O)} \qquad (259)$$

Tal desarrollo se desprende de la ecuacion:

$$\text{tg}\; y = \frac{a\,\text{sen}\; x}{1 - a\cos x} \qquad (62)$$

que nos da:

$$y = a\,\text{sen}\; x + \frac{a^2}{2}\,\text{sen}\; 2x + \frac{a^3}{3}\,\text{sen}\; 3x \ldots . \qquad (103)$$

Así desarrollamos la fórmula para tg $(A - A')$ i nos contentaremos desde luego con el primer término del desarrollo porque las potencias 2, 3, etc., de $\frac{e}{r}$ darán valores mui pequeños.

La fórmula será:

$$A - A' = \frac{e}{r}\,\text{sen}\,(A' - O) \qquad (260)$$

que es la espresion buscada i que indica la correccion que debe aplicarse a la lectura falsificada A' por el error de escentricidad, para tener la verdadera lectura A.

En esta fórmula vemos que la lectura O i la escentricidad e son desconocidas, pues, ya hemos visto que es la direccion CG la que determina O, i el centro de jiracion es desconocido.

Trataremos de encontrar e i O, para eso supongamos que tenemos otro microscopio i con el cual obtenemos una lec-

tura B', afectada por la escentridad, siendo B la lectura justa.

Análogamente tendremos la ecuacion:

$$B - B' = \frac{e}{r} \operatorname{sen} (B' - O) \qquad (261)$$

puesto que O i e no varian.

Procederemos con el promedio de ámbas lecturas obtenidas, o sea con $\frac{A' + B'}{2}$ i para tener el promedio de las lecturas verdaderas le agregaremos la suma de los promedios de ámbos errores.

Tendremos:

$$\frac{A + B}{2} = \frac{A' + B'}{2} + \frac{A - A'}{2} + \frac{B - B'}{2} \qquad (262)$$

i esta es una identidad.

Reemplacemos en ella los valores (260) i (261) i resulta:

$$\frac{A + B}{2} = \frac{A' + B'}{2} + \frac{e}{2r}\Big(\operatorname{sen}(A' - O) + \operatorname{sen}(B' - O)\Big) \qquad (263)$$

tenemos que:

$$\operatorname{sen}(A' - O) + \operatorname{sen}(B' - O) = 2 \operatorname{sen} \frac{A' - O + B' - O}{2} \cos \frac{A' - O - B' + O}{2}$$

$$= 2 \operatorname{sen}\left[\frac{A' + B'}{2} - O\right] \cos \frac{A' - B'}{2} \qquad (264)$$

Introduciendo en la ecuacion este valor se obtiene:

$$\frac{A + B}{2} = \frac{A' + B'}{2} + \frac{e}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{A' + B'}{2} - O\right) \cos \frac{A' - B'}{2} \qquad (265)$$

Los microscopios pueden colocarse de tal manera que $\cos \frac{A' - B'}{2} = 0$ i esto sucederá cuando $A' - B' = 180^o$, o sea, entónces, el segundo microscopio debe colocarse al otro estremo del diámetro; naturalmente $A' - B'$ no será en rigor 180°; pero se procura que difiera mui poco de ese valor, i en tal caso el $\cos \frac{A' - B'}{2}$ será mui pequeño i casi cero, De esta manera desaparece el segundo término del segundo miembro de la ecuacion (265) i resultará:

$$\frac{A + B}{2} = \frac{A' + B'}{2} \qquad (266)$$

esto es, el promedio de las lecturas afectadas por errores de escentricidad es igual al promedio de las lecturas verdaderas, si se emplean dos microscopios que dan lecturas que difieren de casi 180° o sean a los estremos de un diámetro del círculo.

Determinemos ahora la constante O i la escentricidad dada en el factor $\frac{e}{r}$. Esta cantidad $\frac{e}{r}$ está espresada en medida absoluta i para convertirla en segundos debemos multiplicar por el número grande 206265, i el producto será una cantidad no despreciable a pesar de la pequeñez de e.

Ya hemos visto las espresiones:

$$A - A' = \frac{e}{r} \operatorname{sen} (A' - O) \qquad (260)$$

$$B - B' = \frac{e}{r} \operatorname{sen} (B' - O) \qquad (261)$$

Ahora restamos la ecuacion (261) de la (260) i obtenemos:

$$B' - A' = B - A + \frac{e}{r}\left(\operatorname{sen} (A' - O) - \operatorname{sen} (B' - O) \right)$$

$$= B - A + \frac{2\,e}{r} \operatorname{sen} \frac{A' - B'}{2} \cos\left(\frac{A' + B'}{2} - O \right) \qquad (267)$$

Introduzcamos el valor $B - A = 180^o + \epsilon$, i ademas, reemplacemos bajo el coseno B' por A':

$$B' \neq A' - 180^o \tag{268}$$

$$\frac{B'}{2} \neq \frac{A'}{2} - 90 \tag{269}$$

Tambien será sen $\frac{A' - B'}{2} = 1$ porque $A' - B' \neq 180^o$.

Tenemos entónces:

$$B' - A' = 180^o + \epsilon + \frac{2e}{r} \cos (A' - 90^o - O) \tag{270}$$

$$B' - A' = 180^o + \epsilon + \frac{2e}{r} \text{ sen } (A' - O) \tag{271}$$

Desarrollamos sen $(A' - O)$.

$$B' - A' = 180^o + \epsilon + \frac{2e}{r} \cos O \text{ sen } A' - \frac{2e}{r} \text{ sen } O \cos A' \tag{272}$$

i con esta ecuacion podemos determinar las cantidades e i O.

Hagamos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{2e}{r} \cos O &= x \\ \frac{2e}{r} \text{ sen } O &= y \end{aligned}\right\} \tag{273}$$

Tendremos:

$$B' - A' = 180^o + \epsilon + x \text{ sen } A' - y \cos A' \tag{274}$$

En esta ecuacion (274) $B' - A' - 180^o = n$ está dado por la diferencia observada de los dos microscopios, A' i B' son las lecturas hechas. Hai en la ecuacion tres incógnitas x, y, ϵ i

para determinarlas bastarian tres observaciones que darian tres ecuaciones para encontrar x, y, ϵ; pero como hai errores de observacion i de trazos es menester aumentar el número de las determinaciones sobre las absolutamente necesarias.

Haremos entónces en los microscopios las lecturas A' i B' procediendo de 30° en 30° i empezando con 0°:

$$\begin{array}{ll} A' \neq 0^\circ & B' \neq 180^\circ \\ A' \neq 30^\circ & B' \neq 210^\circ \\ A' \neq 60^\circ & B' \neq 240^\circ \\ \vdots & \vdots \\ A' \neq 300^\circ & B' \neq 120^\circ \\ A' \neq 330^\circ & B' \neq 150^\circ \end{array}$$

i obtendremos doce ecuaciones en lugar de las tres indispensables.

Para el caso que contemplamos de doce ecuaciones con tres incógnitas, será menester aplicar el método de los cuadrados mínimos, del cual diré algunas breves palabras sobre su principio, dejando la esposicion teórica del método para otra ocasion.

§ 38. *Aplicacion del método de los cuadrados mínimos.*— Sea, por ejemplo, dado un número s de ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = n_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = n_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_6 x + b_6 y + c_6 z = n_6 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_s x + b_s y + c_s z = n_s \end{array}\right\} \qquad (275)$$

Debemos deducir de las s ecuaciones las tres ecuaciones normales que resuelven las tres incógnitas. Para ésto mul-

tiplicamos primero las ecuaciones por a_1 , a_2 . . . a_s respectivamente. Tenemos así:

$$\left.\begin{array}{llll} a_1^2\,x + a_1\,b_1\,y + a_1\,c_1\,z = a_1\,n_1 \\ a_2^2\,x + a_2\,b_2\,y + a_2\,c_2\,z = a_2\,n_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_s^2\,x + a_s\,b_s\,y + a_s\,c_s\,z = a_s\,n_s \end{array}\right\} \qquad (276)$$

Introduzcamos el signo $\Sigma a a$ que significa la suma de todos los valores $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots . a_s^2)$ i

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,a\,b = (a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots . a_s\,b_s) \\ \Sigma\,a\,c = (a_1\,c_1 + a_2\,c_2 + \ldots . a_s\,c_s) \end{array}\right\} \qquad (277)$$

Si ahora sumamos las ecuaciones (276), tenemos:

$$\Sigma\,a\,a\,x + \Sigma\,a\,b\,y + \Sigma\,a\,c\,z = \Sigma\,a\,n \qquad (278)$$

que será la primera ecuacion normal.

Ahora multiplicamos las ecuaciones respectivamente por b_1 , b_2 , . . . b_s, que son los coeficientes de la segunda incógnita, y i sumamos despues. Introduciendo abreviaciones semejantes, obtenemos:

$$\Sigma\,b\,a\,x + \Sigma\,b\,b\,y + \Sigma\,b\,c\,z = \Sigma\,b\,n \qquad (279)$$

que es la segunda ecuacion normal.

Para encontrar la tercera ecuacion normal procedemos análogamente; es decir, multiplicamos por c_1 , c_2 . . . c_s i sumamos. Resultará:

$$\Sigma\,c\,a\,x + \Sigma\,c\,b\,y + \Sigma\,c\,c\,z = \Sigma\,c\,n \qquad (280)$$

Se entiende fácilmente, que:

$$\Sigma\,a\,b = \Sigma\,b\,a,\ \Sigma\,a\,c = \Sigma\,c\,a,\ \Sigma\,b\,c = \Sigma\,c\,b.$$

Las tres ecuaciones (278), (279) i (280) son las ecuaciones *normales* con las que se determinan las incógnitas x, y, z.

En el caso que ahora consideramos hemos obtenido ecuaciones para determinar los errores, de la forma:

$$\epsilon + x \operatorname{sen} A' - y \cos A' = n \qquad (281)$$

en la cual n significa la diferencia de las lecturas obtenidas, disminuyéndola de 180°.

Los resultados de las lecturas son los siguientes:

A'	B'	n
0°	180°	+ 2.''75
30	210	+ 4. 79
60	240	+11. 51
90	270	+ 3. 99
120	300	+ 2. 59
150	330	— 0. 03
180	0	— 1. 68
210	30	— 2. 40
240	60	— 3. 32
270	90	— 5. 04
300	120	+ 0. 21
330	150	+ 2. 02
		+15.''39

Se nota una marcha de los valores n desde un máximo positivo en 60° hasta un máximo negativo en 270°. Ahora formamos las ecuaciones normales: el coeficiente de ϵ es 1, el de x es sen A' i el de y es $-$ cos A'.

Para obtener la primera ecuacion normal multiplicamos por 1, para la segunda por los sen A' i para la tercera por los ($-$ cos A').

Esplicando mas aun, tenemos las ecuaciones dadas:

$$\begin{array}{l}
\epsilon + x \operatorname{sen} 0^\circ - y \cos 0^\circ = + 2.''75 \\
\epsilon + x \operatorname{sen} 30^\circ - y \cos 30^\circ = + 4.''79 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
\epsilon + x \operatorname{sen} 330^\circ - y \cos 330^\circ = + 2.''02
\end{array}$$

$\Sigma\, a\, a$ será igual a 12; $\Sigma\, a\, b$ es sólo la suma de los senos de 30º en 30º hasta 330º.

Para eso:

sen 0º = 0	sen 180º = 0
sen 30º = $\frac{1}{2}$	sen 210º = $-\frac{1}{2}$
sen 60º = $\sqrt{3/4}$	sen 240º = $-\sqrt{3/4}$
sen 90º = 1	sen 270º = − 1
sen 120º = $\sqrt{3/4}$	sen 300º = $-\sqrt{3/4}$
sen 150º = $\frac{1}{2}$	sen 330º = $-\frac{1}{2}$

Como vemos, la suma de los doce senos vale cero (i jeneralmente la suma de funciones goniométricas de ángulos equidistantes tomada por toda la circunferencia es cero) entónces el segundo término de la primera ecuacion normal valdrá $0.x = 0$.

$\Sigma\, a\, c$ es la suma de los cosenos de 0º a 330º de 30º en 30º, i tambien se puede ver que esta suma vale cero.

De manera que la primera ecuacion normal será:

$$12\,\epsilon + 0.x - 0.y = +\,15.''39$$

El lado derecho es solo la suma de los valores n, pues en la espresion $\Sigma\, a\, n\ a$ vale 1. De esta ecuacion sale:

$$\epsilon = \frac{+15.''39}{12} = +\,1.''28$$

De esto se puede ver como está colocado el segundo mi-

croscopio B que dista 180° + 1."28 de A o sea 180° 0' 1."28 en el sentido de las lecturas crescientes.

Ahora encontraremos la segunda ecuacion normal. Ya hemos visto que $\Sigma\, a\, b$ es igual a $\Sigma\, b\, a$, esto valdrá tambien 0. El primer término de la segunda ecuacion normal es entónces 0. ϵ.

Ahora $\Sigma\, b\, b$; para este coeficiente tomamos la suma de los cuadrados de los sen A'.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{sen}^2 & 0^\circ = 0 \\ \text{sen}^2 & 30^\circ = \frac{1}{4} \\ \text{sen}^2 & 60^\circ = {}^3/_4 \\ \text{sen}^2 & 90^\circ = 1 \\ \text{sen}^2 & 120^\circ = {}^3/_4 \\ \text{sen}^2 & 150^\circ = {}^1/_4 \\ \text{sen}^2 & 180^\circ = 0 \end{array}\right\} = 3$$

La suma de los cuadrados hasta 180° vale 3; por lo tanto, para toda la circunferencia valdrá 6. Luego, el segundo término será + 6 x.

Ahora veamos $\Sigma\, b\, c$; esto es la suma de los productos sen A' cos A'.

Reemplacemos sen A' cos A' por $\frac{\text{sen } 2\, A'}{2}$.

Entónces tendremos otra vez la suma de senos de ángulos equidistantes (esta vez de 60°) que nos dará como ántes una

suma igual a cero; o sea $\Sigma\, b\, c = 0$; el término vale entónces $-0.\, y$. De manera que la segunda ecuacion normal es:

$$0.\, \epsilon + 6\, x - 0.\, y = \Sigma\, b\, n$$

Ahora buscaremos $\Sigma\, b\, n$, o sea la suma de los productos sen $A'.\, n$:

+	2.75	× sen	0°	=		0
+	4.79	× sen	30°	=	+	2.39
+	11.51	× sen	60°	=	+	9.97
+	3.99	× sen	90°	=	+	3.99
+	2.59	× sen	120°	=	+	2.24
—	0.03	× sen	150°	=	—	0.02
—	1.68	× sen	180°	=		0
—	2.40	× sen	210°	=	+	1.20
—	3.32	× sen	240°	=	+	2.88
—	5.04	× sen	270°	=	+	5.04
+	0.21	× sen	300°	=	—	0.18
+	2.02	× sen	330°	=	—	1.01
			La suma		= +	26.50

Entónces la segunda ecuacion normal es:

$$0.\, \epsilon + 6\, x - 0.\, y = + 26.''50$$

de donde:

$$x = + 4.''42$$

Para la tercera ecuacion normal se procede de una manera análoga.

$\Sigma\, c\, a$ i $\Sigma\, c\, b$ ya son conocidas, ámbas valen cero. $\Sigma\, c\, c$ es la suma de los cuadrados de los cosenos de los ángulos, i resultará tambien como suma el valor 6.

Tendremos:

$$0.\, \epsilon + 0.\, x - 6\, y = \Sigma\, c\, n$$

para $\Sigma\, c\, n$ multiplicamos los valores n por los cosenos A'.

$$
\begin{array}{rcl}
+\ 2.75 \times \cos\ 0^{\circ} & = & +\ 2.75 \\
+\ 4.79 \times \cos\ 30^{\circ} & = & +\ 4.15 \\
+\ 11.51 \times \cos\ 60^{\circ} & = & +\ 5.75 \\
+\ 3.99 \times \cos\ 90^{\circ} & = & 0 \\
+\ 2.59 \times \cos\ 120^{\circ} & = & -\ 1.29 \\
-\ 0.03 \times \cos\ 150^{\circ} & = & +\ 0.03 \\
-\ 1.68 \times \cos\ 180^{\circ} & = & +\ 1.68 \\
-\ 2.40 \times \cos\ 210^{\circ} & = & +\ 2.08 \\
-\ 3.32 \times \cos\ 240^{\circ} & = & +\ 1.66 \\
-\ 5.04 \times \cos\ 270^{\circ} & = & 0 \\
+\ 0.21 \times \cos\ 300^{\circ} & = & +\ 0.10 \\
+\ 2.02 \times \cos\ 330^{\circ} & = & +\ 1.75 \\
\hline
\text{La suma} & = & +\ 18.66
\end{array}
$$

Entónces:

$$0.\ \epsilon + 0.\ x - 6\ y = +\ 18.''66$$

De donde obtenemos:

$$y = -\ 3.''11$$

Como vemos el desarrollo del método ha sido fácil en el caso que contemplamos, debido a los coeficientes de las incógnitas.

Los resultados son entónces:

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= +\ 1.''28 \\
x &= +\ 4.42 \\
y &= -\ 3.11
\end{aligned}
$$

Pero:

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= \frac{2\,e}{r} \cos O \\
y &= \frac{2\,e}{r} \operatorname{sen} O
\end{aligned}
\right\} \qquad (273)
$$

o sea:

$$\text{tg } O = \frac{y}{x} \qquad (282)$$

de aquí sacamos que:

$$O = 324^{\circ}\ 52'$$

Esto quiere decir que la línea que une el centro jeométrico con el de jiracion pasa por la lectura 324° 52'.

Cuadramos x e y de (275) i sumamos. Resulta:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{2\,e}{r}\right)^2 \qquad (283)$$

De donde obtenemos:

$$\frac{2\,e}{r} = 5.''40$$

$$\frac{e}{r} = 2.''7$$

Espresemos e en milímetros, siendo $r = 525^{mm}$:

$$e^{mm} = \frac{2.70 \times 525}{206265} = 0.^{mm}0069$$

Como se puede ver el error de escentricidad alcanza a 69 diez milésimos de milímetros, i este pequeño error influye en las lecturas de tal suerte que las hace diferir de varios segundos de arco. Apesar de esto no debemos considerar que solo la escentricidad falsea las lecturas, sino que hai otras causas, como los errores de trazos, que influyen tambien; para probar que esto sucede vamos a hacer el cálculo de los valores n con las cantidades obtenidas para x, y, ϵ, aplicando la fórmula:

$$\epsilon + x \text{ sen } A' - y \cos A' = n \qquad (281)$$

Si no hubiera mas error que la escentricidad, esta prueba

deberia darnos para n mas o ménos los valores obtenidos por la observacion que solo desviarian por errores accidentales. Entónces, sea n_c el valor calculado i n_o el valor observado:

A'	n_c	n_o	$O - C$
0°	+ 4.39	+ 2.75	— 1.64
30°	+ 6.18	+ 4.79	— 1.39
60°	+ 6.67	+ 11.51	+ 4.84
90°	+ 5.70	+ 3.99	— 1.71
120°	+ 3.56	+ 2.59	— 0.97
150°	+ 0.80	— 0.03	— 0.83
180°	— 1.83	— 1.68	+ 0.15
210°	— 3.62	— 2.40	+ 1.22
240°	— 4.10	— 3.32	+ 0.78
270°	— 3.14	— 5.04	— 1.90
300°	— 0.99	+ 0.21	+ 1.20
330°	+ 1.76	+ 2.02	+ 0.26
			Suma = + 0.01

La columna O — C indica observacion ménos cálculo i se puede ver como tales diferencias concuerdan poco, especialmente la + 4.84, i ello se debe en parte a error de trazo. Para el ángulo 324° 52' o sea para O debe resultar n_c igual a ϵ mismo; i en efecto, si interpolamos en el cuadro de arriba entre—0."99 i +1."76 veremos que n_c para 324°52' = +1."28 que es el valor de ϵ.

El valor enorme + 4."84 en la columna O — C proviene de un gran error del trazo de 240° (véase páj. 150) i como ese error es positivo, impone a los O — C vecinos errores negativos en compensacion.

§ 39. *Errores sistemáticos de trazos.*—Los errores de los trazos son mas difíciles de determinar porque no están sujetos a lei, a pesar de esto, hai astrónomos que creen que tales errores pueden espresarse por una fórmula. Por ejemplo, un trazo t que tenga un error $f(t)$ puede hacer pensar en

que la máquina de dividir del artista ha cometido una série de errores de la forma de la série de Fourier.

$$f(t) = a_1 \operatorname{sen} t + b_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} 2t + b_2 \cos 2t$$

$$+ a_3 \operatorname{sen} 3t + b_3 \cos 3t + \ldots\ldots \quad (249)$$

en la cual las constantes a, b disminuyen con el aumento del subíndice. Seria posible determinar a_1 b_1 a_2 b_2 etc. El miembro constante de la série de Fourier puede faltar, indicaria un error comun de todos los trazos que se puede despreciar.

Si tal suposicion de obtener una fórmula para dichos errores fuese justa, habria el medio de hacerlos desaparecer usando mas microscopios. En efecto, cuando el microscopio I tiene la lectura t, el II tiene $180^o + t$; entónces el error de trazo de II, si fuera justa la série, se espresaria por:

$$f(180^o + t) = -a_1 \operatorname{sen} t - b_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} 2t + b_2 \cos 2t$$

$$- a_3 \operatorname{sen} 3t - b_3 \cos 3t + \ldots \quad (250)$$

Si se hacen las lecturas con ámbos microscopios tendremos que el error promedio de ámbos trazos está espresado por:

$$\frac{f(t) + f(180^o + t)}{2} = a_2 \operatorname{sen} 2t + b_2 \cos 2t + \ldots. \quad (251)$$

donde han desaparecido todos los términos de múltiples impares del ángulo.

Si aumentamos a 4 el número de microscopios se evitarian tambien los errores dependientes del doble del ángulo de la série de Fourier i quedarian solo los de coefi-

cientes pequeños de los términos mas altos que se pueden despreciar. Tambien un número grande de microscopios destruye en su promedio los errores accidentales de los trazos.

§ 40. *Errores accidentales de trazos.* — Como ya hemos visto, los círculos divididos están afectados por un error que es preciso eliminar para garantizar la exactitud de las observaciones, me refiero a la posicion errónea de los trazos de division. Hemos ya dicho que el actual círculo meridiano de Santiago tiene un total de 4320 trazos de 5' entre sí, i se ha evidenciado la ventaja de tal sistema de divisiones; en el nuevo círculo meridiano de Espejo subsiste el mismo número de trazos, con la ventaja ademas de un radio menor, lo que hará que la distancia lineal entre las divisiones sea mas pequeña. Así se tendrá para el antiguo círculo meridiano Eichens (véase páj. 127):

$$1'' = 0.0027 \text{ mm. en distancia lineal}$$

o sea que la menor aproximacion posible de 0.''1 valdrá:

$$0.''1 = 0.3\ \mu$$

si μ es un micron o el milésimo de milímetro.

Vemos así que llegamos a medidas de tanta pequeñez que son comparables a las de las lonjitudes de onda de la luz i se comprende fácilmente que aun un buen mecánico puede cometer errores de algunos décimos de segundo en la division de los círculos.

El método de determinar los errores de division es el siguiente:

Podemos suponer que un trazo cualquiera, por ejemplo, el 0° 0' tenga el error 0''. Colocamos ahora otro microscopio

B (fig. 28) a 180° de A, i lo fijamos en esa posision. La diferencia entre ámbos microscopios será:

$$180^{\circ} + c$$

porque es casi imposible hacer diferir A i B de 180° cabales.

Determinamos primero el error del trazo 180° 0'. Para

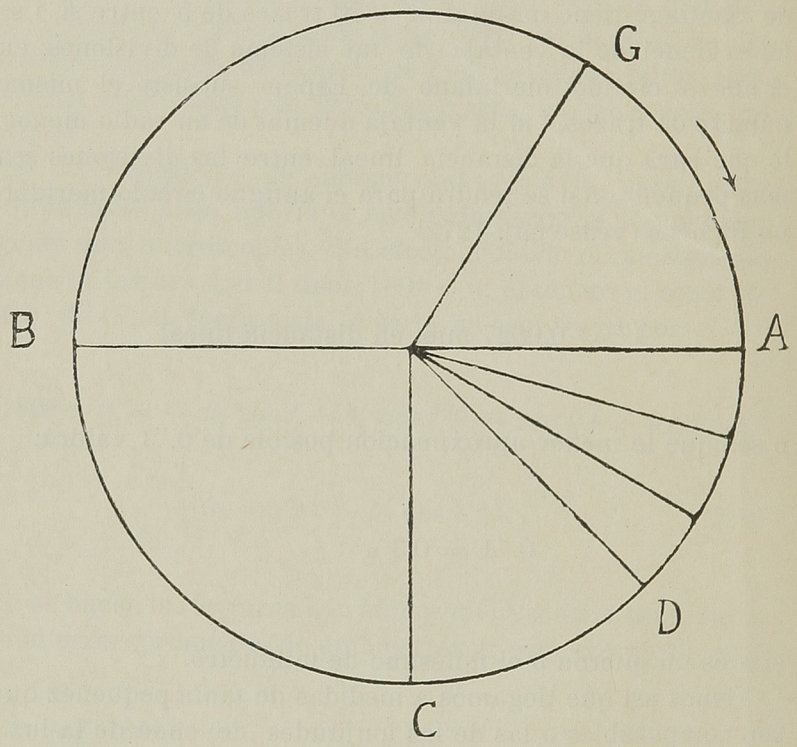

Figura 28.

esto jiramos el círculo hasta que aparezca en A 0° 0', luego, aparecerá en B 180° 0'; con el tornillo tanjencial procuramos que la lectura de A sea lo mas cerca posible a 0° 0' 0'' i en seguida, leemos la lectura del otro microscopio. En el caso práctico, ya efectuado, hemos obtenido:

para A 359° 59' 42."47

para B 179° 59' 46."10

La diferencia de las dos observaciones es:

180° 0' 3."63

que se compone de la diferencia entre ámbos microscopios 180° + c" i del error del trazo 180° 0'. Ahora jiramos el círculo de 180° i obtenemos:

en A 180° 0' 12."9

en B 0° 0' 11."5

Diferencia será 180° 0' (— 1."4).

Ya que en los dos casos restamos la lectura en A de la en B.

Indicamos el error de 180° con $e_{(180)}$ i el de 0° con $e_{(0)}$. Así tendremos que correjir la primera lectura en B de + $e_{(180)}$ o sea:

$$179° 59' 46."10 + e_{(180)}$$

i la segunda lectura en A:

$$180° 0' 12."9 + e_{(180)}$$

para tener el valor exento de error de trazo. Esto es para el trazo 180°, porque hemos supuesto que el error e_0 es 0".

Como la diferencia de los dos microscopios está naturalmente afectada por el error del trazo 180°, i esta diferencia debe ser la misma en las dos lecturas, obtenemos las ecuaciones restando A de B:

$$180° + c = 180° 0' + 3."63 + e_{(180)}$$

$$180° + c = 180° 0' - 1."4 - e_{(180)}$$

De las cuales se obtiene:

por adicion: $2\,c = +\ 2.''23,\ c = +\ 1.''11$

por sustraccion: $0 = 2\,e_{(180)} + 5.''03,\ e_{(180)} = -\ 2.''52$

Vemos entónces que los dos microscopios difieren entre sí de 180° + 1.''11, i si leemos en la division 180° tenemos que aplicar como correccion su error — 2.''52.

En efecto, corrijamos las lecturas obtenidas:

Para B	179° 59' 46.''10 — 2.''52
Para A	359 59' 42.''47 + e_0
Diferencia	180° 0' 1.''11

I en la otra observacion:

Para A	180° 0' 12.''9 — 2.''52
Para B	0 0 11.5 + e_0
Diferencia	180° 0' 1.''12

Este mismo principio de dividir arcos conocidos en partes iguales se aplica para determinar los errores de los demas trazos.

Para determinar el error del trazo 90° fijamos otro microscopio C distante de A 90° + c', leemos en A i C i tendremos la diferencia 90° — 0°, enseguida jiramos el círculo de 90° para atras, es decir, que 90° coincida con A i así obtendremos la otra diferencia 180° — 90°. De esta manera obtenemos dos ecuaciones para las incógnitas c' i $e_{(90)}$, i en las cuales $e_{(90)}$ tiene signo distinto respectivamente. Con el microscopio C determinaremos despues el error de 270° en idéntica forma que para 90°, intercalando 270° entre 180° i 0°.

Colocaríamos ahora otro microscopio D distante de A 45° + $c_{(45)}$ i con las dos ecuaciones resultantes encontraríamos $c_{(45)}$ i $e_{(45)}$. Este microscopio nos permitiria hallar los errores de 45°, 135°, 225°, 315°.

Para los errores de los trazos que distan entre sí de 15° colocaríamos dos microscopios en 15° i 30°, es decir, tendríamos que hacer la triseccion del ángulo de 45°; como resultado de las observaciones se obtendrian tres ecuaciones que nos darian los errores de los trazos i las constantes de posicion de los microscopios.

Vamos a seguir considerando el caso que hemos practicado en nuestro meridiano, donde no podemos agregar nuevos microscopios, sino debemos aprovechar los seis que tenemos, porque todos estos microscopios están fijos en un pilar de piedra, para obtener el error de 60°, 120°, 240°, 300°.

Sea G la posicion del microscopio, de modo que el arco GA vale 60°.

Empezamos la lectura en G con 0° 0'. Obtuvimos en G:

0° 0' 44."9

i al mismo tiempo en A:

60° 0' 43."2

De manera que la diferencia de lecturas es 60° 0' (−1."7).

Ahora jiramos el círculo para atras i obtenemos:

en G 60° 0' 5."8

en A 120° 0' 4."0

La nueva diferencia de lecturas:

60° 0' (— 1."8)

Volvemos a jirar el círculo de 60° i obtenemos en:

G 120° 0' 1."0

i en:

A 180 0' 1."0

La diferencia es:

60° 0' 0."0

Pero aquí debemos recordar que el error del trazo 180°

es ya conocido, i vale — 2.''52; de manera que la última diferencia será:

$$60^{o}\ 0'\ (-\ 2.''52)$$

Ahora vemos como resultan tres ecuaciones. En efecto, la primera diferencia obtenida 60° 0' (— 1.''7) es igual al arco 60° mas la constante c mas el error del trazo 60, que es $e_{(60)}$. La segunda diferencia de lecturas 60° 0' (— 1.''8) es igual a 60° mas el valor c ménos el error $e_{(60)}$ mas el error de 120°. La última diferencia 60° 0' (— 2.''52) es igual a 60° mas c ménos el error de 120°.

Es decir, las tres ecuaciones son:

$$60^{o}\ 0'\ (-\ 1.''7) = 60^{o} + c + e_{(60)}$$

$$60^{o}\ 0'\ (-\ 1.''8) = 60^{o} + c - e_{(60)} + e_{(120)}$$

$$60^{o}\ 0'\ (-\ 2.''52) = 60^{o} + c - e_{(120)}$$

o sea:

$$\left.\begin{aligned} -\ 1.''7 &= c + e_{(60)} \\ -\ 1.''8 &= c - e_{(60)} + e_{(120)} \\ -\ 2.''52 &= c - e_{(120)} \end{aligned}\right\} \qquad (284)$$

De este sistema deducimos, sumando:

$$-\ 6.''02 = 3\ c$$

$$c = -\ 2.''01$$

esto quiere decir que el arco comprendido entre los dos microscopios es de:

$$59^{o}\ 59'\ 57.''99$$

Ademas, deducimos del sistema (284):

1.ª ecuacion $e_{(60)} = -1.''7 + 2.''01 = +0.''31$

3.ª ecuacion $e_{(120)} = -2.''01 + 2.''52 = +0.''51$

La segunda ecuacion del sistema (284) nos sirve de prueba introduciendo en ella los valores de $e_{(60)}$ i $e_{(120)}$ i c.

En efecto:

$$-2.''01 - 0.31 + 0.51 \text{ nos da } -1.''8$$

Ahora comparamos el arco GA que vale segun hemos visto 59° 59' 57.''99 con otros trazos múltiplos de 60°, por ejemplo, con 240°, 300°. Partimos del trazo 180°.

Así obtenemos las lecturas:

en G 180° 0' (48.''3 — 2.''52)

en A 240° 0' 50.''0

Despues:

en G 240° 0' 34.''3

en A 300° 0' 30.''0

Despues:

en G 300° 0' 47.''4

en A 0° 0' 42.''4

Las respectivas diferencias de lecturas son:

$$\left.\begin{aligned} 60^\circ\,0' + 4.''22 &= 60^\circ + c + e_{(240)} \\ 60^\circ\,0' - 4.''3 &= 60^\circ + c - e_{(240)} + e_{(300)} \\ 60^\circ\,0' - 5.''0 &= 60^\circ + c - e_{(300)} \end{aligned}\right\} \qquad (285)$$

De este sistema sacamos:

$$-5.08 = 3\,c$$

$$c = -1.''69 .$$

Como vemos c ha salido un poco diferente del valor ya obtenido para el mismo arco GA, pero esto solo depende de errores de observacion; habíamos obtenido ya $c = -2.''01$ i ahora $c = -1.''69$; por esta razon es preciso hacer numerosas determinaciones para disminuir tales errores.

Del sistema de ecuaciones (285) sale tambien:

$$e_{(240)} = +4.''22 + 1.''69 = +5.''91$$

$$e_{(300)} = -1.''69 + 5.''0 = +3.''31$$

La ecuacion del medio vuelve a servir para comprobar los valores obtenidos; en efecto:

$$-1.''69 - 5.''91 + 3.''31 = -4.''3$$

En esta forma hemos conseguido determinar los errores de diversos trazos del círculo i, como vemos, el error del trazo 240° es bastante grande, lo cual viene a corroborar lo dicho anteriormente al determinar la escentricidad. Para los errores de los trazos de 5° en 5° habria que colocar microscopios a esa distancia; pero como esto es imposible porque no cabrian en un espacio tan pequeño, se procede de otra manera: colocaríamos un microscopio a 0° i otro a 85° i determinaríamos los errores de los trazos 85° i 170° intercalándolos entre 0° i 255°, trazo ya conocido porque es múltiplo de 15° i determinaríamos en la misma forma los errores de los trazos desconocidos de 100° i 185°, por medio de los ya conocidos de 15° i 270°. Así tendríamos al fin todos los trazos múltiples de 5°. Al fin colocamos el microscopio movil a 89° distancia del fijo i procediendo análogamente, obtendremos 89°, 178°, 267°, 356°, por una division en cinco partes del arco 0° a 360° + 85°.

Ahora con un arco de 89° se puede encontrar el error de todos los trazos de grado a grado. Despues colocamos el microscopio movil a 89° 30' distancia del fijo i obtenemos los errores de los medios grados. Para la tarea de colocar los

microscopios como los necesitamos, se puede adaptar al pilar un tambor a lo largo del cual pueda fijarse un microscopio fijo i movil, i con esto se puede conseguir cualquier distancia i el error de un trazo cualquiera.

Como los errores de trazos son casi inevitables, se procura destruir sus efectos en el círculo meridiano Eichens haciendo lecturas de un mismo ángulo con seis microscopios i considerando que los errores de los trazos leidos se anulen en el promedio de las seis lecturas; pero como es probable que haya errores escepcionales demasiado grandes es menester seleccionar aquellos haciendo la determinacion de cada uno de ellos; así, por ejemplo, para los doce trazos de un grado tendremos que tomar con el hilo movil de un microscopio las diferencias:

$$\begin{aligned}
(5') - (0') &= e_{(5)} - e_{(0)} + r \\
(10') - (5') &= e_{(10)} - e_{(5)} + r \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
(60') - (55') &= e_{(60)} - e_{(55)} + r
\end{aligned}$$

donde $e_{(0)}$ i $e_{(60)}$ son conocidos por las determinaciones anteriores, en las cuales r es el *run*, cuyo valor aproximado se obtiene tomando la doceava parte de la suma de las doce diferencias observadas.

Restamos el run i veremos si las diferencias de cada dos errores de trazos consecutivos difieren sensiblemente de 0; así descubrimos los errores notables, que hai que aplicar.

Es tan abrumadora la tarea de determinar el error de cada trazo, que es mejor, como hemos dicho, colocar mas microscopios en el círculo i leerlos a la vez; p. e. en las observaciones de una zona del cielo limitada a pocos grados, como la actual de Santiago de 106° a 114° de distancia polar norte, leemos en dos microscopios dos trazos, es decir, un total de cuatro. Entrando, pues, en el resultado solo la cuarta parte de la suma de los errores accidentales singulares, podemos despreciarlos si correjimos de antemano los de un valor escepcionalmente grande, determinados como lo indicamos.

§ 41. *Flexion.*—El tubo del anteojo, fijo en su parte media por el eje que lo atraviesa i libre en sus estremos, está solicitado por la pesantez de modo que los estremos tienden a inclinarse hácia la tierra encorvando el tubo; la flexion tiene

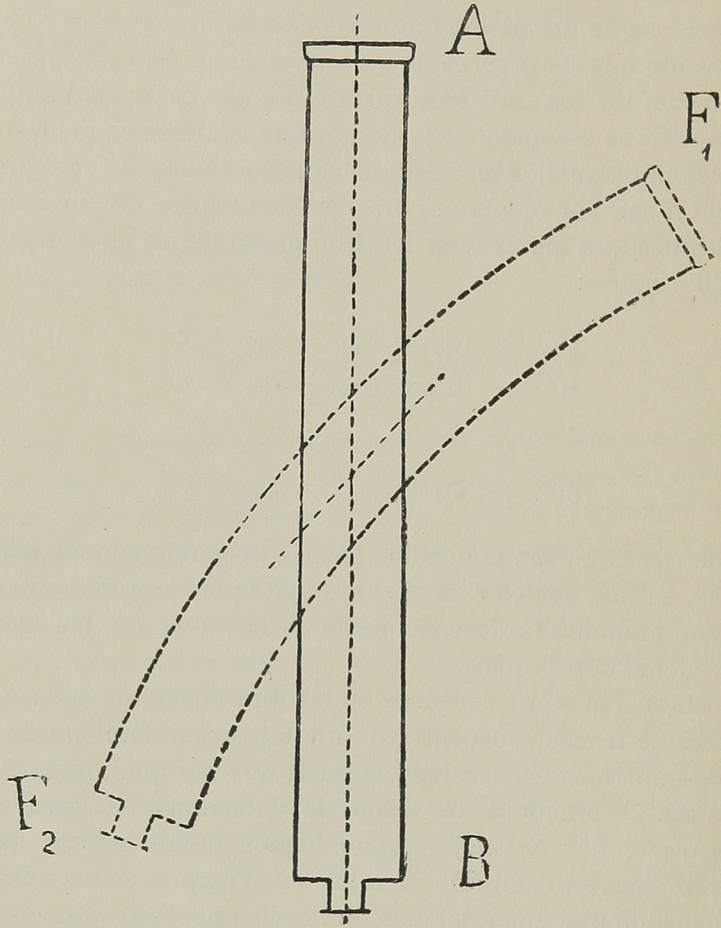

Figura 29.

su máximo en la posicion horizontal i su mínimo en la vertical del eje óptico del anteojo. Sea, por ejemplo, AB la posicion vertical del anteojo (fig. 29) i F_1 F_2 otra posicion cualquiera, a 30° del zenit, por ejemplo. El tubo se dobla encor-

vándose (en la figura mui exajerada) debido a que es imposible la rijidez absoluta del anteojo. Así colocado el tubo, la distancia zenital de la línea que une los centros del objetivo i ocular no corresponde a la indicada por la lectura del círculo, sino estas dos mostrarán una diferencia que se llama flexion; pero puede suceder que ámbos ángulos sean iguales, i esto se consigue haciendo de igual peso las dos partes del anteojo porque entónces las flexiones de los dos estremos serán iguales. Por eso los constructores de los instrumentos meridianos modernos dan al tubo forma i peso iguales a sus dos partes, de tal suerte que se puede cambiar objetivo por ocular i vice-versa.

En cuanto a observaciones de una zona estrecha, no se toma en cuenta la flexion, porque su efecto es idéntico para las estrellas de la zona i para las fundamentales, si esas se comprenden entre los límites de la zona; pero si se trata de determinar posiciones de estrellas fundamentales será menester observar en una posicion del anteojo i despues cambiar objetivo por ocular para repetir la observacion.

§ 42. *Manera de hacer las punterías.*— En el campo del instrumento hai, como sabemos, una red de hilos como lo indica la fig. 5, páj. 16, los verticales para ascensiones rectas i los horizontales para declinaciones; todo el sistema está colocado en un marco i hai otro móvil por medio de un tornillo hácia arriba o abajo, que lleve uno o algunos hilos que se pueden mover contra el sistema de los fijos, i pueden desplazarse paralelos a sí mismos con el ausilio de una rosca micrométrica esterior provista de un tambor para lecturas.

Para las *punterías* de declinacion se dirije el anteojo a la estrella, i el observador, por medio de un tornillo de tanjencia que mueve todo el tubo, (junto con el círculo) procura que la luz del astro se bisecte por el hilo con el cual observa; si la estrella se oculta detrás del hilo por su brillo escaso, es preferible colocar el anteojo de modo que la estrella quede entre dos hilos mui próximos (fig. 5) a distancia igual de ámbos.

Al desplazar el anteojo con el tornillo de tanjencia ocurrirá algunas veces que pequeños sacudimientos ocasionen errores en las punterías; pero si hai hilos movibles puede fijarse el anteojo con toda calma ántes de hacer la puntería i apuntar a la estrella por medio del tornillo micrométrico i en seguida leer el tambor [1]).

En tal caso se harán préviamente las coincidencias de los hilos fijo i móvil i se determinará observando dos estrellas vecinas de declinacion conocida el valor de una revolucion del tambor para reducir las lecturas por la distancia del hilo móvil al hilo fijo.

El hilo medio de declinaciones debe pasar por el eje óptico del anteojo, línea que une los centros del lente objetivo i ocular o en su defecto, estar mui cerca de él, pero solo para tener los imájenes bien nitidos. La desviacion es algo análogo a la colimacion en la observacion de las ascensiones rectas, sin embargo, no afecta de ninguna manera a las lecturas, puesto que todo se refiere al hilo, bien fijado en su posicion relativa al eje óptico.

Por ejemplo, observando una zona en que hai estrellas fundamentales no es menester conocer el error de colocacion del hilo medio horizontal con respecto al hilo ideal que pasaria por el eje óptico, pues las lecturas de las fundamentales con declinacion conocida i de las estrellas de zona al determinar se refieren al mismo hilo, cuya colocacion falsa pues no importa. En el supuesto de observar el nadir, por un procedimiento de que pronto hablaremos, resulta lo mismo.

§ 43. *Curvatura del paralelo.*—Las estrellas en el campo del instrumento describen arcos de sus círculos pequeños alrededor del polo i sus trayectorias son por eso no rectas

---

[1]) Así, p. e., el señor Gilliss, jefe de la comision astronómica que trabajó en el cerro Santa Lucía 1849-1852, que determinó la posicion de 16600 estrellas entre — 65° i — 90°, zona entónces casi del todo inesplorada, mantenia durante las zonas distantes mas de $5\frac{1}{2}$° del polo fijo el anteojo i determinaba las declinaciones con un sistema de 7 hilos móviles.

perpendiculares al hilo medio, esceptuando las estrellas ecuatoriales, que son las únicas que marchan a largo de un círculo máximo. Por eso para determinar la distancia de una estrella del polo tendremos que hacer la puntería en declinacion cuando la estrella pasa por el meridiano; pero como seria incierta una sola manera de observar las puntes rías, se prefiere hacerlas en cualquier parte del recorrido en el campo del anteojo i aplicaremos entónces las correcciones pertinentes a la *curvatura del paralelo.*

Sea *S'S* (fig. 30) el camino de una estrella en el campo del

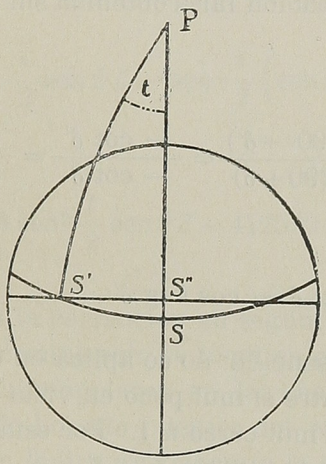

Figura 30.

instrumento; sea *S'S"* el hilo de la puntería, que en este caso fué hecha en *S'*; *P* el polo celeste. Como vemos por la figura la distancia polar obtenida ha sido *PS"* en vez de *PS* i como *PS'* = *PS* determinaremos el valor de *SS"* que es lo que falta a la lectura obtenida para obtener *SP.* La correccion *SS"* es una funcion del ángulo horario a que se ha hecho la puntería i por esta causa es preciso marcar el momento de ella, sea con alguna señal en el cronógrafo, sea observándolo directamente con un reloj, sea anotando el hilo del red vertical cerca del cual se hace la punteria (aquí no se necesita la última exactitud en determinacion del ángulo hora-

rio). El signo del ángulo horario no influye en el de la correccion; sea + t o — t, el signo de $S''S$ no varía.

Del triángulo rectángulo esférico $PS'S''$ tenemos:

$$\cos t = \frac{\text{tg } PS''}{\text{tg } PS'} \tag{286}$$

Pero

$$PS' = 90^o + \delta$$

i

$$PS'' = 90^o + \delta'$$

en que δ' es la declinacion falsa obtenida sin haber aplicado la correccion.

Entónces:

$$\cos t = \frac{\text{tg}\,(90^o + \delta')}{\text{tg}\,(90 + \delta)} = \frac{-\cot \delta'}{-\cot \delta} = \frac{\text{tg } \delta}{\text{tg } \delta'} \tag{287}$$

de donde:

$$\text{tg } \delta = \cos t \text{ tg } \delta' \tag{288}$$

Esta fórmula tan sencilla no se aplica en esta forma porque δ' i δ difieren entre sí mui poco en vista de la pequeñez de t, cuyo coseno es mui cerca a 1. Por esta causa vamos a buscar una fórmula que nos de $\delta - \delta'$.

Recordemos la fórmula:

$$\text{tg } y = n \text{ tg } x \tag{61}$$

que se desarrollaba en:

$$y = x + \frac{n-1}{n+1}\text{sen } 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \text{sen } 4x + \ldots. \tag{112}$$

Desarrollamos análogamente (288). Resulta:

$$\delta = \delta' + \frac{\cos t - 1}{\cos t + 1}\text{sen } 2\delta' + \frac{1}{2}\left(\frac{\cos t - 1}{\cos t + 1}\right)^2 \text{sen } 4\delta' + \ldots \tag{289}$$

en lugar de $\frac{\cos t - 1}{\cos t + 1}$ escribimos:

$$\frac{-(1-\cos t)}{1+\cos t} = \frac{-2\,\mathrm{sen}^2\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{-\mathrm{sen}^2\frac{t}{2}}{1-\mathrm{sen}^2\frac{t}{2}}$$

$$= -\mathrm{sen}^2\frac{t}{2} - \mathrm{sen}^4\frac{t}{2} - \ldots\ldots \qquad (290)$$

De modo que la fórmula será:

$$\delta = \delta' - \mathrm{sen}^2\frac{t}{2}\mathrm{sen}\,2\,\delta' - \mathrm{sen}^4\frac{t}{2}\left(\mathrm{sen}\,2\,\delta' - \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,4\,\delta'\right) + \ldots \qquad (291)$$

o

$$\delta = \delta' - 206265\,\mathrm{sen}^2\frac{t}{2}\mathrm{sen}\,2\,\delta' - 412530\,\mathrm{sen}^4\frac{t}{2}\mathrm{sen}\,2\,\delta'\mathrm{sen}^2\delta' + \ldots$$

si espresamos la correccion en segundos de arco.

El último término solo se toma en cuenta cuando se trata de estrellas circumpolares en las cuales puede ser considerable el ángulo horario t dentro del campo del anteojo.

La ecuacion indica que siempre la curvatura del paralelo da las declinaciones demasiado grandes i que hai que hacer su valor *numéricamente* mas chico para obtener las δ verdaderas.

Diferentes tablas astronómicas facilitan los valores de los factores, p. e. Albrecht (cuarta edicion) da en su tabla 26, páj. 208-230, los $\log \frac{2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\,t}{\mathrm{sen}\,1''}$ i en tabla 28, páj. 232 233 los $\log \frac{2\,\mathrm{sen}^4\frac{1}{2}\,t}{\mathrm{sen}\,1''}$ hasta $t = 2^h$. Lo mismo hacen L. Ambronn e I. Domke en sus «Astronomisch-geodätische Hilfstafeln», Berlin 1909, p. 81-94 hasta $t = 1^h$.

§ 44. *Correccion por falta de orientacion.* — Otra fuente de error en la determinacion de las lecturas es que el hilo con que se observan las punterías no sea perpendicular al meridiano, es decir, no paralelo al movimiento diario de una estrella ecuatorial. El tubo que lleva ocular i micrómetro entra a rozamiento en el anteojo i puede jirar alrededor del eje óptico; de esta manera se coloca el micrómetro apretándolo despues, de suerte que el hilo de declinacion quede paralelo a la direccion que lleva una estrella ecuatorial cualquiera, ya que tales estrellas recorren en el campo una línea

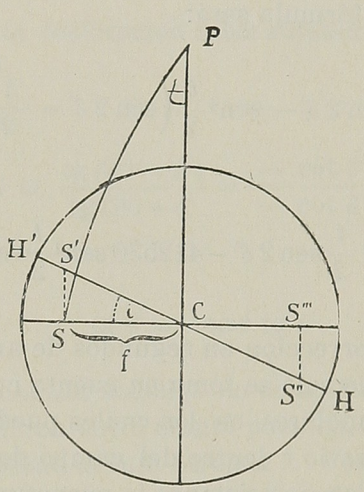

Figura 31.

recta, como se puede ver de la fórmula de curvatura del paralelo si $\delta' = 0^o$

$$\delta = \delta' - \text{tg}^2 \frac{t}{2} \text{ sen } 2\,\delta' \qquad (291)$$

Entónces, por ser sen $2\,\delta' = 0$, siempre será:

$$\delta = \delta'$$

Ahora suponemos que tal orientacion se haya hecho con un error.

Sea $H'H$ la direccion del hilo de declinacion, PC la del meridiano (fig. 31). Vamos a llamar i la inclinacion entre el hilo $H'H$ i la direccion perpendicular al meridiano. Al observar punterías con un hilo como $H'H$ se comete error cuyo mínimo, cero, está en el centro C, o sea en el meridiano; por lo tanto, la correccion depende de la inclinacion i i de la distancia de la puntería al centro del micrómetro.

En S' se apunta entónces una estrella que sin inclinacion se hubiera apuntado en S, que es la proyeccion de S', ademas, sea $SC = f$.

Tenemos del triángulo rectángulo $S'SC$:

$$SS' = f \operatorname{tg} i$$

Como la estrella que se observa tiene una declinacion cualquiera:

$$f = t \cos \delta$$

i reemplazando:

$$SS' = t \operatorname{tg} i \cos \delta$$

en donde t varia de signo al pasar de uno al otro lado del meridiano.

Para determinar i es menester hacer punterias de una estrella en su trayecto por el campo tantas veces que sea posible i anotar las épocas de ellas para obtener los ángulos horarios t.

Antes de hacer los cálculos es menester agregar la correccion por curvatura del paralelo.

Así, por ejemplo, bastarian dos observaciones, en S' i S'' con los ángulos horarios t_1 i t_2 que nos darian las ecuaciones:

$$SS' = t_1 \operatorname{tg} i \cos \delta$$

$$S''S''' = t_2 \operatorname{tg} i \cos \delta$$

BIBLIOTECA NACIONAL
SECCION CHILENA

Restando:

$$SS' - S''S''' = (t_1 - t_2)\ \text{tg}\ i\ \cos\delta$$

El término del lado izquierdo es la diferencia de las lecturas del círculo, $(t_1 - t_2)$ es la diferencia de épocas i de aquí deducimos por division tg i cos δ, i por consiguiente i. Para las dos observaciones es bueno observar en dos puntos del campo lo mas léjos del meridiano i a lados diferentes de él; ademas, basta leer un trazo i un solo microscopio en las dos lecturas porque los errores de run i trazos están idénticos para ámbas; sin embargo es mejor aumentar el número de punterias.

Como ilustracion del método tenemos el ejemplo siguiente: Se observó el 6 de Julio de 1911 (con el aire mui movido) la estrella λ Virginis.

La primera columna indica las épocas en tiempo sideral de las punterías i la segunda la distancia polar norte leida en el círculo para cada puntería.

El pasaje por el hilo medio se observó a $14^h\ 14^m\ 19^s$:

Epoca de la puntería	Lectura	Correccion por curvatura	Lectura correjida
$14^h\ 12^m\ 25^s$	102° 58' 20."2	— 1."55	102° 58' 18."65
43	17. 6	— 1. 10	18. 10
13 18	19. 2	— 0. 44	15. 36
52	15. 8	— 0. 09	15. 41
14 9	15. 5	— 0. 01	16. 59
32	16. 6	— 0. 02	15. 98
52	16. 0	— 0. 13	13. 87
15 11	14. 0	— 0. 32	15. 58
23	15. 9	— 0. 49	16. 11
38	16. 6	— 0. 74	15. 16
50	15. 9	— 0. 99	16. 61
16 5	17. 6	— 1. 34	15. 96
21	17. 3	— 1. 77	15. 83

La correccion por curvatura, que da la tercera columna,

la calculamos formando los ángulos horarios; ellos son las diferencias entre las punterías i el pasaje por el hilo medio a $14^h\ 14^m\ 19^s$:

$$\begin{array}{rr} -\ 1^m & 54^s \\ -\ 1 & 36 \\ \vdots & \\ +\ 1 & 46 \\ +\ 2 & 2 \end{array}$$

Consideramos la curvatura del paralelo por la fórmula:

$$\delta = \delta' - 206265\ \text{sen}^2\ \frac{t}{2}\ \text{sen}\ 2\ \delta' \qquad (291)$$

i usamos las tablas de Ambronn i Domke para economizar tiempo; pero el primero de los valores vamos a calcular directamente:

$$t = 1^m\ 54^s\ ,\ \frac{t}{2} = 57^s = 14.'25$$

$$\delta = -\ 12^o\ 58',\ 2\ \delta = -\ 25^o\ 56'$$

$$\log \text{sen}\ \frac{t}{2} = 7.6175 - 10$$

$$\log \text{sen}^2\ \frac{t}{2} = 5.2350 - 10$$

$$\log \text{sen}\ 2\ \delta = 9.6408_n - 10$$

$$\log 206265 = 5.3144$$

$$\log \text{curvatura} = 0.1902_n - 10$$

$$\text{curvatura} = -\ 1.''55$$

Tenemos así trece observaciones para determinar i. Si nos limitaremos a la primera i última obtendríamos una diferencia en épocas de $3^m\ 56^s$ i otra de lecturas de — 2."82. La ecuacion correspondiente es:

$$-2."82 = 236^s \operatorname{tg} i \cos \delta$$

de donde:

$$\operatorname{tg} i \cos \delta = -\frac{2.82}{236} = -0."012$$

Pero debemos aplicar el método de los cuadrados mínimos para obtener el valor óptimo que se puede sacar de las observaciones. I lo haremos en una forma especial que simplificará muchísimo el cálculo numérico. Cada observacion da una ecuacion de la forma $(t - T) \operatorname{tg} i \cos \delta = l - L$, donde t es la época de la punteria, T el pasaje por el hilo medio, l la lectura i L la lectura correspondiente al pasaje por el hilo medio, lectura no hecha, sino que debe calcularse. Tenemos pues dos incógnitas, $(\operatorname{tg} i \cos \delta)$ i L. El cálculo se simplifica, si calculamos T_0, el promedio de las épocas t de punterias, i buscamos L_0, la lectura correspondiente a este momento. Tendremos entónces $T_0 = \frac{\Sigma t}{n}$, si n está el número de observaciones i ademas:

$$(t - T_0) \operatorname{tg} i \cos \delta + L_0 = l$$

El método de cuadrados mínimos da las siguientes dos ecuaciones normales (véase § 38).

$$n L_0 + \Sigma (t - T_0).(\operatorname{tg} i \cos \delta) = \Sigma l$$

$$\Sigma (t - T_0) L_0 + \Sigma (t - T_0)^2.(\operatorname{tg} i \cos \delta) = \Sigma l (t - T_0)$$

pero $\Sigma (t - T_0) = 0$, segun la definicion de T_0 i resulta:

$$L_0 = \frac{\Sigma l}{n}$$

$$\operatorname{tg} i \cos \delta = \frac{\Sigma l (t - T_0)}{\Sigma (t - T_0)^2} = \frac{\Sigma (l - L_0)(t - T_0)}{\Sigma (t - T_0)^2}$$

El siguiente escema da las singulares fases del cálculo:

$$T_0 = 14^h\ 14^m\ 38.^s4$$

$$L_0 = 102^o\ 58'\ 16.''09$$

$t - T_0$	$l - L_0$	$(t - T_0)^2$	$(t - T_0)(l - L_0)$
— 133	+ 2.''56	17689	— 340.''48
— 125	+ 2. 01	15625	— 251. 25
— 80	— 0. 73	6400	+ 58. 40
— 46	— 0. 68	2116	+ 31. 28
— 29	+ 0. 50	841	— 14. 50
— 6	— 0. 11	36	+ 0. 66
+ 14	— 2. 22	196	— 31. 08
+ 33	— 0. 51	1089	— 16. 83
+ 45	+ 0. 02	2025	+ 0. 90
+ 60	— 0. 93	3600	— 55. 80
+ 72	+ 0. 52	5184	+ 37. 44
+ 87	— 0. 13	7569	— 11. 31
+ 103	— 0. 26	10609	— 26. 78
Sumas — 5	+ 0. 04	72979	— 619. 35

Las sumas de las dos primeras columnas se han formado solo como prueba. Deberian salir cero i se distinguen un poquito de cero por la redondeacion de T_0 i L_0, las dos otras sumas sirven para el cálculo:

$$\text{tg } i \cos \delta = - \frac{619.''35}{72979} = - 0.''0085$$

La discordancia entre este valor i el anteriormente obtenido solo por la primera i última punteria proviene de errores de observacion. La lectura correspondiente al pasaje por el meridiano que buscamos la obtenemos así:

L_o corresponde a $14^h\ 14^m\ 38.^s4$

el pasaje por el meridiano sucedió a $14^h\ 14^m\ 19.^s3$

para estos $-\ 19.^s1$ calcula-

mos el efecto de la inclinacion

$$-\ 19.^s1 \times -\ 0.''0085 = +\ 0.''16$$

L_o	$102^o\ 58'\ 16.\ 09$
L	$102^o\ 58'\ 16.\ 25$

El valor de i, usando la misma estrella i la estrella T M 588 de la misma declinacion, en tres noches ha dado:

$$\begin{array}{r} -\ 0.''0092 \\ -\ 0.\ 0144 \\ -\ 0.\ 0142 \\ -\ 0.\ 0105 \\ -\ 0.\ 0085 \\ -\ 0.\ 0090 \\ \hline \end{array}$$

promedio jeneral

$$\text{tg } i \cos \delta = -\ 0.0103$$

i como

$$\cos \delta = 0.97$$

resulta

$$\text{tg } i = -\ 0.0106$$

Esto significa que toda estrella ecuatorial sufre en la lectura del círculo un error de 0.''0106 por cada segundo de ángulo horario. Por ejemplo, para 50^s tenemos:

$$50 \times 0.0106 = -\ 0.''53$$

ántes del meridiano, i despues +0.''53.

Es conveniente determinar la inclinacion de hilos de tiempo en tiempo, porque a menudo la inversion del anteojo u otros sacudimientos pueden hacer jirar un poco el tubo del micrómetro i es preferible determinarla usando estrellas casi ecuatoriales, evitándose así el cálculo de la curvatura del paralelo.

Si se invierte el anteojo no cambia el signo de la inclinacion del hilo, siempre si el círculo leido tiene su division progrediendo en el mismo sentido como ántes.

REFRACCION

§ 45. *Nociones jenerales.*—Por *refraccion astronómica* designanse los cambios que sufre la direccion de un rayo de luz de una estrella infinitamente lejana hasta llegar al observador. Al atravesar las diversas capas de aire, de densidades diferentes, el haz luminoso se dobla o refracta; pero no solamente la atmósfera terrestre puede causar refraccion de la luz, sino tambien debe haber *refraccion cósmica*, producida por enormes masas gaseosas diseminadas en el espacio o por capas heterojéneas de polvo cósmico, como cree von Seeliger, cuya teoría sobre la existencia en el espacio de vastas rejiones de materia oscura esplicaria la ausencia de estrellas en ciertas rejiones de la Via Láctea, como, por ejemplo, el denominado *saco de carbon*, cerca de la Cruz del Sur. Si consideramos el espacio lleno de corpúsculos, que tienden hácia un centro de atraccion de gran masa, como el sol, constituyendo una envoltura o atmósfera de matería cósmica, los rayos luminosos sufrirán tambien desviaciones al atravesar la zona de tales corpúsculos. Las teorías de Courvoisier i Harzer manifiestan que la fotósfera no tiene solucion de continuidad con la materia que orijina la luz zodiacal, la cual se estiende mas allá de la órbita terrestre. Como el conjunto de los corpúsculos adopta una forma elipsoídica, la tierra en dos posiciones opuestas de su órbita tendrá ante sí, con respecto a una estrella, capas de atmósfera cósmica de distinto espesor i de densidad diversa. Por lo tanto, debe haber

un coeficiente anual de refraccion cósmica, i será un trabajo digno del observatorio nacional de Espejo ensayar de determinar el valor de dicho coeficiente por observaciones de suma exactitud.

Trataremos teóricamente la refraccion causada por la atmósfera terrestre; para ello suponemos que la densidad del aire disminuye desde la superficie, por capas concéntricas hácia la periferia hasta que el enrarecimiento sea completo; el espesor de la capa de aire efectivo es calculado en 60 kms., aunque observaciones de estrellas filantes dan un valor de 300 a 400 kms. para la altura, a la cual se encienden por rozamiento con los partículos de la atmósfera.

Para nuestras consideraciones supondremos primero el aire colocado en capas paralelas al horizonte i no tomaremos en cuenta los efectos del viento, refraccion *anómala*, que hace titilar las imájenes; obtendremos entónces la refraccion *media*.

§ 46. *Temperatura absoluta.*—Recordaremos algunas leyes de la física que tratan de los gases relacionados con la temperatura i la presion. En efecto, la lei de Gay-Lussac espresa:

Si c es el coeficiente de dilatacion de un gas, coeficiente que está supuesto idéntico para todos los gases, i el gas aumenta su temperatura de t a t_1 grados, el volúmen del gas aumenta en $(t_1 - t)$ c multiplicado por el volúmen inicial.

Como vemos, si t_1 es menor que t el gas se comprime, i si la lei de Gay-Lussac fuese exacta en absoluto, habrá una temperatura a la cual el volúmen del gas se anula.

Si v es el volúmen, el aumento de dilatacion será:

$$(t_1 - t)\ c.\ v$$

i cuando el gas se comprime hasta cero el volúmen resulta:

$$v + (t_1 - t)\ c.\ v = 0 \qquad (292)$$

o sea

$$v\,(1 + [t_1 - t]\,c) = 0 \qquad (293)$$

esto es

$$1 + (t_1 - t)\,c = 0 \qquad (294)$$

Si salimos de $t = 0$, tenemos:

$$1 + t_1\,c = 0 \qquad (295)$$

$$t_1 = -\frac{1}{c} \qquad (296)$$

de manera que la temperatura a la cual el volúmen es cero, es igual al valor recíproco del coeficiente de dilatacion i con signo negativo.

Algunos coeficientes de dilatacion para el aire son:

Segun	Regnault	$c = 0.003670$
»	Mendelejeff	$c = 0.003684$
»	Bessel	$c = 0.0036433$

segun las tablas de refraccion de Pulkowa $c = 0.003689$

Los dos últimos valores son determinados por la teoría i no por trabajos de laboratorio.

Ahora, de los valores inversos de c obtenemos las temperaturas del cero absoluto por la fórmula i resultan:

Regnault	— 272.°5	271.°95
Mendelejeff	— 271.4	
Bessel	— 274.5	
Pulkowa	— 271.1	

Los trabajos de laboratorio dan un promedio de 271.°95, pero las determinaciones se han hecho con aire puro i no cargado de vapor de agua, que es el estado normal de la at-

mósfera, por eso queremos adoptar el valor promedio de las determinaciones de laboratorio i el de Pulkowa, o sea:

$$-271.^{o}5$$

como cero absoluto, de suerte que una temperatura absoluta τ está espresada por:

$$\tau = t + 271.^{o}5 \qquad (297)$$

si t es la temperatura en grados de Celsius.

§ 47. *Presion i densidad del aire.*—Respecto de la presion del aire recordaremos algunas leyes. La primera dice:

1.ª *La presion del aire elástico por unidad de superficie es proporcional al producto de la densidad del aire por su temperatura absoluta.*

2.ª *A lo largo de una linea vertical la disminucion de presion en la atmósfera por cualquier altura es igual al peso de una columna de aire de esta altura i tomando por base la unidad.*

Representemos la primera lei por una fórmula:

$$p = \gamma \cdot \tau \cdot \rho \qquad (298)$$

p es la presion, τ la temperatura absoluta, ρ la densidad del aire i γ una constante. Así para dos presiones p_1 i p_2

$$p_1 = \gamma\, \tau_1\, \rho_1$$

$$p_2 = \gamma\, \tau_2\, \rho_2$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}\,\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

De la primera lei sacamos:

$$\rho = \frac{p}{\gamma\, \tau} \qquad (299)$$

El peso de cualquier cuerpo cambia con la gravedad, que es funcion de la distancia del cuerpo a la tierra.

La gravedad disminuye con la altura a la tierra i por eso vamos a introducir la constante g que significa la razon de la gravedad en tal altura con respecto a la gravedad en la superficie; por lo tanto g es menor que 1, o de otra manera, g es la gravedad a la altura h espresada en unidades de la gravedad en la superficie; por ejemplo, si h vale 1.01 radios terrestres g será $\left(\frac{1}{1.01}\right)^2 \neq 0.98$.

Consideremos un cilindro de aire de altura igual a la de la atmósfera; en la superficie de la tierra habrá la presion 760 mm. i en la parte mas elevada 0 mm. (fig. 32); en un punto A la presion será mayor que en B. Sea dh la altura de la capa AB, su volúmen será $1 \times 1 \times dh$ i su peso $dh \times \rho$

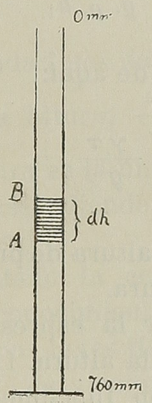

Figura 32.

i tomando en cuenta la variacion de la gravedad, el cilindro de altura dh pesará:

$$dh.\ \rho.\ g.$$

Sea dp el cambio de presion al pasar de A a B, i como segun la lei 2.ª ese cambio es igual al peso de la capa recorrida con signo contrario, tendremos:

$$dp = - dh. \rho. g \tag{300}$$

e integrando:

$$p = g. \rho. h \tag{301}$$

en la cual h es la altura total de la columna; esta espresion vale si ρ es constante en toda la columna. Adoptando la suposicion que ρ sea constante para todas las capas de la atmósfera, podemos introducir una densidad media i una altura h_1 llamada *altura de presion*. Esto supone que el aire verdadero se reemplaza por otro de densidad constante i que la columna de altura h_1 tenga igual peso que la de altura h i de densidad variable.

Entónces:

$$p = g. \rho. h_1 \tag{302}$$

i en vista de (298), sale de aquí:

$$h_1 = \frac{\gamma \tau}{g} \tag{303}$$

espresion que nos da la altura de presion i ésta, como vemos, cambia con la temperatura.

Ahora vamos a buscar la espresion que nos da la relacion de la densidad con la altura. La presion p, la temperatura τ i la densidad ρ son funciones de la altura.

Diferenciamos la ecuacion:

$$\rho = \frac{1}{\gamma} \frac{p}{\tau} \tag{299}$$

con respecto a h, i obtenemos (diferenciando logarítmicamente):

$$\frac{d \rho}{\rho \, dh} = \frac{dp}{p \, dh} - \frac{d \tau}{\tau \, dh} \tag{304}$$

Consideramos ahora la ecuacion (300) que toma en cuenta la presion del volúmen de aire i de que sacamos:

$$\frac{dp}{dh} = -\rho \cdot g$$

Introduciendo en (304):

$$\frac{d\rho}{dh} = -\rho\left(\frac{\rho\, g}{p} + \frac{d\tau}{\tau\, dh}\right) \qquad (305)$$

pero en vista de la relacion (298) resulta:

$$\frac{d\rho}{dh} = -\frac{\rho}{\tau}\left(\frac{g}{\gamma} + \frac{d\tau}{dh}\right) \qquad (306)$$

que es la espresion buscada i nos da la variacion de la densidad con el cambio de la altura; $\frac{d\tau}{dh}$, la variacion de la temperatura con la altura es la única incógnita i se determina por esperiencias ascendiendo en la atmósfera o por suposiciones teóricas.

En (306) ya hemos tratado la ecuacion jeneral de la refraccion. Vemos, que el conocimiento del fenómeno descansa sobre el estudio de algunas leyes físicas i de observaciones meteorolójicas. Como a la desviacion de los rayos luminosos obran tambien las altas capas atmosféricas al hombre directamente inaccesibles, se ha tratado de elevar aparatos inscriptores por medio de globos i volantines a grandes alturas para estudiarlas; este último procedimiento ha rejistrado datos de las capas de aire a mas de doce kilómetros sobre el nivel del mar.

§ 48. *Valor numérico de las constantes.*— Consideremos ahora el aire de densidad uniforme en todas sus capas; es fácil calcular la altura h_1, definida por la ecuacion (302), que tendrá la columna de aire en tal suposicion. En efecto,

el barómetro señala la presion del aire, que se mide sobre una escala graduada. Supongamos un tubo barométrico encorvado (fig. 33); la columna de mercurio p equilibra una de aire del mismo diámetro i de altura igual a la atmósfera entera; de manera que establecemos la igualdad de pesos de las dos columnas:

$$h_1 \times \rho_a = 760^{mm} \times \rho_{Hg} \qquad (307)$$

En la que h_1 es la altura de la atmósfera de igual densi-

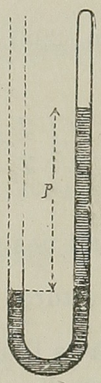

Figura 33.

dad, ρ_a su densidad i ρ_{Hg} la del mercurio. Segun Regnault el peso específico del aire es:

$$\rho_a = 0.0012932$$

i ademas, se conoce el peso específico del mercurio que vale:

$$\rho_{Hg} = 13.596$$

Entónces:

$$h_1 = \frac{760 \times 13.596}{0.0012932} = 7990200^{mm} = 7.99 \text{ kms.}$$

Es decir, el aire tendria una altura de cerca a ocho kiló-

metros si su densidad fuera idéntica en todas sus capas a la de la superficie de la tierra.

Veamos ahora la determinacion de la constante γ de la fórmula (298):

$$p = \gamma . \rho . \tau$$

Para esto vamos a definir como *unidad de presion* la ejercida por un metro cúbico de agua sobre un metro cuadrado i a la temperatura 0° de Celsio.

Es fácil deducir de la altura del mercurio en el barómetro, la de una columna de agua que equilibre la presion atmosférica; la altura de tal columna será igual a:

$$0.760 \times 13.596 = 10.333 \text{ m.}$$

El valor $10^1/_3$ m. nos dice que una columna de agua de tal altura tambien tiene el equilibrio al peso de toda la atmósfera (siendo iguales los cortes) i la presion de la atmósfera p será entónces 10.333 de las «unidades de presion», que acabamos de definir.

Ahora para calcular γ de la ecuacion (298), tenemos a la superficie de la tierra:

$$\tau = 271.^{o}5$$

$$p = 10.333$$

$$\rho = 0.0012932$$

De modo que (298) se convierte en

$$10.333 \text{ metros} = \gamma \times 0.012932 \times 271.5$$

o sea:

$$\gamma = 29.429 \text{ mtrs.}$$

Para nuestras consideraciones es ventajoso reemplazar la presion p por la altura del mercurio que la mide. Sea b di-

cha altura barométrica espresada en unidades del barómetro normal, esto es, $\frac{b}{b_0}$ en donde $b_0 = 760$ mm.

La altura de la columna de agua equivalente a la presion de la atmósfera será para la altura barométrica b:

$$10.333 \times b \text{ metros}$$

i a grandes alturas sobre el nivel del suelo tomamos en cuenta la gravedad, de modo que:

$$p = 10.333 \times b \times g \qquad (308)$$

La ecuacion (299) que despeja ρ, nos da si introducimos el valor de γ:

$$\rho = \frac{10.333 \times b \times g}{29.429 \times \tau} = 0.35110 \frac{b\,g}{\tau} \qquad (309)$$

Llevemos el valor numérico de γ a la fórmula fundamental ya obtenida (306) i resulta:

$$\frac{d\rho}{dh} = -\frac{\rho}{\tau}\left(0.033980\,g + \frac{d\tau}{dh}\right) \qquad (310)$$

§ 49. *Caso especial interesante, que podria existir.*—Supongamos que sea posible que en esta ecuacion resulte:

$$\frac{d\tau}{dh} = -0.033980.\ g$$

entónces seria

$$\frac{d\rho}{dh} = 0$$

esto es:

$$\rho = \text{constante}$$

o sea, que el aire tendria densidad constante por todas las

alturas hasta su límite. Como g es mui cercano a 1 podemos escribir:

$$\frac{d\tau}{dh} = -0.034$$

$$d\tau = -0.034\, dh$$

es decir, la temperatura bajaria con cada metro en 0.°034 de Celsius o con cada kilómetro de ascension 34°, es decir:

para dh = 1000 mtrs. seria $d\tau$ = — 34°,

lo cual indicaria una disminucion de 1° Celsius por mas o ménos cada 30 mtrs. de elevacion. Tal conclusion, exajerada sin duda, [1]) nos permitiria considerar la densidad del aire como constante en toda su masa; si tal cosa ocurriera *no existiria refraccion alguna*, segun su propia definicion.

§ 50. *Disminucion de la temperatura con la altura.*— Para tener una idea exacta de $\frac{d\rho}{dh}$, variacion de la densidad con la altura, hai que determinar la disminucion de la temperatura i no hai otro medio por ahora que las esperiencias de globos i volantines, puesto que las estaciones fijas, por su poca altura, no dan los resultados que se necesitan. Así, el Blue Hill Observatory de Hyde Park (U. S. A.) ha efectuado sistemáticamente ascensiones de volantines al mismo tiempo que la U. S. Weather Bureau. En Alemania i Francia se han elevado globos con aparatos rejistradores a alturas de 12 o mas kilómetros. Estos estudios dan una idea de $\frac{d\tau}{dh}$ i los resultados obtenidos

1) Ella daria entre Valparaiso al nivel del mar i Santiago con 520 metros de altura una diferencia media de temperatura de 18°, miéntras el valor observado es 3° hasta 4°.

concuerdan en asignar un descenso de 6°.5 Celsius por cada kilómetro de altura; para un metro seria:

$$\frac{d\tau}{dh} = -0.^{\circ}0065$$

o mas o ménos la quinta parte del caso especial del párrafo precedente.

Sin embargo, los antedichos esperimentos han demostrado que en alturas mas elevadas la disminucion de temperatura es mas lenta a medida que se asciende, i este hecho manifiesta que la atmósfera tiene una estension mas grande que la asignada hasta ahora, lo que está de acuerdo con las observaciones de meteoritos i la duracion del crepúsculo. Sobre éste diremos solo algunas palabras: tal fenómeno es causado por la reflexion de la luz solar sobre los corpúsculos suspendidos en el aire i termina solo cuando el sol tiene una depresion de 18° bajo el horizonte (fin del crepúsculo astronómico).

Segun ésto, habrá polvo flotando en la atmósfera a la altura de 75 kms., i es probable que mas allá la densidad del aire no permite la suspension de partículas sólidas.

§ 51. *Hipótesis de la disminucion de la temperatura.*—En vista que el esperimento nos aclarece solo la disminucion de la temperatura en las capas inferiores hai que refujiar a la hipótesis para fijar ideas sobre el valor numérico importante de $\frac{d\tau}{dh}$ en nuestra ecuacion (306).

Voi a considerar las hipótesis mas importantes elaboradas sobre lo refraccion i despues entraré en las fórmulas. En primer lugar, todas ellas suponen que no varía la refraccion al pasar del dia a la noche, puesto que el calentamiento del sol no afecta las capas de aire que atraviesan los rayos solares; solo en contacto con el suelo se nota aumento de temperatura, de manera que el calor que sentimos proviene de los rayos que salen del suelo, i que afecta solo la capa ínfima del aire, ménos influyente en la refraccion.

La primera hipótesis dada por Newton es la siguiente:

A) *La temperatura es constante en todas las alturas.*

La segunda dada por Bouguer:

B) *La densidad disminuye uniformemente con la altura.*

Esta hipótesis aplicada por Simpson i Bradley daria una altura efectiva del aire de 16 kilómetros o sea el doble de la «altura de presion», i apesar de no ser exacta, da resultados bastante satisfactorios.

C) La tercera dada por Bessel modifica la hipótesis de Newton, sin aplicar una lei fija para la disminucion de la temperatura. Se ha usado en casi todo el siglo pasado a pesar de ser teóricamente inadmisible.

D) Esta hipótesis lleva el nombre de Ivory i *supone que la temperatura disminuye uniformemente con la altura.* Daria una altura atmosférica efectiva de 50 kms.

E) Supone que *la temperatura disminuye para iguales alturas siempre por la misma fraccion de su valor absoluto.*

Supongamos, pues, una temperatura de 291.°5 al nivel del suelo; a 5 km. disminuye p. e. $\frac{1}{10}$ de su valor absoluto, = 29.15 o sea, se convierte en 262.35; a 2 × 5 o 10 km. disminuye de 1/10 de este = 26.23 i quedan 236.12 para 3 × 5 o 15 kms., debemos restar 23.61 i queda 212.51. Esta hipótesis es la única que corresponde a la idea de una atmósfera que se disipa insensiblemente, *sin límite definido* (porque restando siempre iguales fracciones de un número dado, éste nunca se reduce a cero, sino se hace tal operacion infinitas veces); ademas, cumple con la condicion de que cuanto *mayor* es la temperatura *mas rápida* es la disminucion.

§ 52. *Discusion de las cinco hipótesis.*—1. Aplicaremos la fórmula fundamental (306) a las diversas suposiciones anteriores.

Newton ha supuesto que la temperatura no cambia con la altura, esto es:

$$\tau = \text{constante}$$

De donde:

$$\frac{d\tau}{dh} = 0 \tag{311}$$

La ecuacion (306) se reduce entónces a:

$$\frac{d\rho}{dh} = -\frac{\rho}{\tau} \cdot \frac{g}{\gamma} \tag{312}$$

Por las consideraciones del § 47 vimos que:

$$h_1 = \frac{\gamma \tau_1}{g} \tag{303}$$

i suponiendo una temperatura:

$$\tau_1 = 280^{o} \ (t = +8^{o}.5)$$

tenemos:

$$h_1 = 29.4 \times 280$$

lo que nos da un valor de cerca a 8 kilómetros para h_1 .

Reemplacemos el valor de h_1 de (303) en la ecuacion (312) i encontraremos:

$$\frac{d\rho}{dh} = -\frac{\rho}{h_1} \tag{313}$$

o sea:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dh}{h_1} \tag{314}$$

Integramos, i resulta:

$$\mathrm{l}\,\rho = -\frac{h}{h_1} + C, \tag{315}$$

en donde el signo l indica logaritmo neperiano o natural.

Encontremos el valor de la constante de integracion C. Para eso hagamos $h = 0$, es decir, encontremos la espresion para la superficie de la tierra; entónces, si ρ_1 es la densidad en dicha superficie, obtenemos:

$$l\,\rho_1 = C \tag{316}$$

Introduciendo este valor en la fórmula, tenemos:

$$l\,\rho = l\,\rho_1 - \frac{h}{h_1} \tag{317}$$

o lo que es lo mismo:

$$l\,\frac{\rho}{\rho_1} = -\frac{h}{h_1} \tag{318}$$

I como el logaritmo de un número n es el esponente a que se eleva la base para obtener dicho número n, obtendremos, siendo en este caso la base la de los logaritmos naturales, es decir, e:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = e^{-\frac{h}{h_1}} \tag{319}$$

Esta es la fórmula de Newton; que nos da la densidad como funcion de la altura; ella contiene dos constantes: ρ_1, densidad en la superficie i h_1, altura de presion igual a 8 kilómetros.

Vamos a calcular un ejemplo empleando la fórmula (319).

Buscaremos las densidades de la atmósfera a las alturas 1, 2, 5,.... 100 kilómetros.

Para 1 kilómetro:

$$h = 1, h_1 = 8$$

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{1}{e^{\frac{h}{h_1}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{8}}}$$

Aplicando logaritmos de Briggs:

$$\log \frac{\rho}{\rho_1} = \log 1 - \frac{1}{8} \log e$$

$$\log e = \text{Módulo} = 0.43429$$

$$-\frac{1}{8} \log e = -0.05429$$

$$\log 1 = 0.00000$$

$$\log \frac{\rho}{\rho_1} = 9.94571 - 10$$

$$\frac{\rho}{\rho_1} = 0.882$$

Para dos kilómetros:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} \log e = -0.10857$$

$$\log 1 = 0.00000$$

$$\log \frac{\rho}{\rho_1} = 9.89143 - 10$$

$$\frac{\rho}{\rho_1} = 0.779$$

Para cinco kilómetros de altura:

$$-\frac{5}{8} \log e = -0.2714$$

$$\log \frac{\rho}{\rho_1} = 9.7286 - 10$$

$$\frac{\rho}{\rho_1} = 0.535$$

BIBLIOTECA NACIONAL
SECCION CHILENA

Para cien kilómetros:

$$-\frac{100}{8}\log e = -5.429$$

$$\log 1 = 0.000$$

$$\log \frac{\rho}{\rho_1} = 4.571 - 10$$

$$\frac{\rho}{\rho_1} = 0.00000372$$

En resúmen tenemos:

A 1 km. de altura, $\frac{\rho}{\rho_1} = 0.882$

» 2 » » » $= 0.779$

⋮

» 5 » » » $= 0.535$

⋮

» 100 » » » $= 0.00000372$

Ya a esta última altura la densidad del aire es tan pequeña que solo alcanza a cuatro millonésimas de la densidad de la superficie.

La hipótesis que acabamos de considerar no concuerda, como hemos visto, con los resultados esperimentales; su única ventaja es la sencillez de su espresion matemática.

2. Pasemos a la segunda hipótesis, que supone una disminucion de la densidad uniformente con la altura. La densidad en una altura dada tendria por espresion:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho_1 - \frac{\rho_1}{2} \cdot \frac{h}{h_1} \\ \text{o} \qquad \rho &= \rho_1 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{h}{h_1}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (320)$$

Esta fórmula ha servido para calcular las «Tabulae Regiomontae refractionum»; sin embargo la teoría de tal lei es inadmisible i vamos a demostrarlo:

Conocemos la altura de presion $h_1 = 8$ kms. i el peso de la columna de aire.

La presion sobre la unidad de la base se compone de las presiones de los elementos de altura dh i de volúmen $dh \times 1 \times 1$; el peso de ellos será $\rho\, dh$. El peso total es entónces la integral:

$$p_1 = \int_0^\infty \rho\, dh \tag{322}$$

entre los límites $h = 0$, $h = \infty$.

Introduzcamos en la integral el valor de Bessel, resultará:

$$p_1 = \int_0^\infty \rho_1\, e^{-k\frac{h}{h_1}}\, dh \tag{323}$$

ρ_1 es una constante. Resolvemos primero la integral indefinida.

Nos da:

$$-\frac{\rho_1 h_1}{k}\, e^{-k\frac{h}{h_1}} \tag{324}$$

Pasando a los límites, tenemos para el superior $e^{-\infty} = 0$ i para el inferior $e^0 = 1$. El resultado es:

$$p_1 = 0 - \left(-\frac{\rho_1 h_1}{k}\right) = +\frac{\rho_1 h_1}{k} \tag{325}$$

Ya sabemos que el peso de la columna de aire se conoce

Si ρ_1 es la unidad i damos a h diversos valores 1, 2... 8 kms., tenemos:

para 1 km. $\rho = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{8} = \frac{15}{16}$

para 2 km. $\rho = 1 - \frac{1}{2}\frac{2}{8} = \frac{7}{8}$

. . .

para 8 km. $\rho = 1 - \frac{1}{2}\frac{8}{8} = \frac{1}{2}$

De la espresion (320) se ve que la densidad tiene un límite en la altura h_0, donde ella se hace igual a cero, i esto sucede cuando:

$$1 - \frac{1}{2}\frac{h_0}{h_1} = 0$$

o sea cuando:

$$h_0 = 2\,h_1$$

esto es:

$$h_0 = 16 \text{ kms.}$$

Segun esta hipótesis, vemos, como ya hemos dicho, que la atmósfera tiene un límite brusco a 16 kilómetros de altura. Suposicion en abierta contradiccion con los hechos, da sin embargo mejores resultados que la primera hipótesis.

3. *La hipótesis de Bessel* está espresada por una fórmula semejante a la de Newton:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = e^{-k\frac{h}{h_1}} \qquad (321)$$

en donde k se determina por observaciones. Bessel ha encontrado:

$$k = 0.9649$$

por el barómetro, i ademas que $p_1 = \rho_1 h_1$ segun la definicion de h_1 ; pero la fórmula de Bessel nos da:

$$p_1 = \frac{\rho_1 h_1}{k} = \frac{\rho_1 h_1}{0.9649}$$

valor distinto del verdadero. A pesar del error teórico de la fórmula, los resultados que da son bastante buenos; sirvió, p. e., al astrónomo Auwers para reducir las observaciones de Bradley i fué usada en la reduccion de numerosas determinaciones de declinaciones durante el siglo pasado.

4. *Hipótesis de Ivory.* — Supone que $\frac{d\tau}{dh}$ es el mismo para todas las alturas. Si salimos de la temperatura τ_1 , tenemos:

$$\tau = \tau_1 (1 - \beta h) \qquad (326)$$

en donde β es una constante. Derivemos (326) segun la altura:

$$\frac{d\tau}{dh} = -\beta \tau_1 \qquad (327)$$

Llevemos este valor a la ecuacion fundamental (306), i tendremos:

$$\frac{d\rho}{dh} = -\frac{\rho}{\tau}\left(\frac{g}{\gamma} - \beta \tau_1\right) \qquad (328)$$

Reemplacemos τ por τ_1 de la ecuacion (326) i pasemos ρ al primer miembro i dh al segundo; obtenemos:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\frac{g}{\gamma} - \beta \tau_1}{\tau_1 (1 - \beta h)} dh \qquad (329)$$

Integramos:

$$l\,\rho = C + \frac{\frac{g}{\gamma} - \beta \tau_1}{\tau_1 \beta} l\,(1 - \beta h) \qquad (330)$$

Si $h = 0$ resultará $\rho = \rho_1$. Entónces $C = l\,\rho_1$ puesto que $l\,(1 - \beta\,h) = 0$.

Introduzcamos una abreviacion; hacemos:

$$\frac{g - \beta\,\gamma\,\tau_1}{\gamma\,\tau_1\,\beta} = \frac{g}{\gamma\,\tau_1\,\beta} - 1 = y \qquad (331)$$

i la ecuacion se reduce a:

$$l\,\rho = l\,\rho_1 + y\,l\,(1 - \beta\,h) \qquad (332)$$

Entónces queda, tomando los números:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = (1 - \beta\,h)^y \qquad (333)$$

espresion que da la densidad a cualquier altura.

Aceptemos el caso de que, segun esta fórmula, la altura sea limitada. Sea h_0 esta altura, i para esto:

$$1 - \beta\,h_0 = 0 \qquad (334)$$

puesto que en la fórmula:

$$\tau = \tau_1\,(1 - \beta\,h) \qquad (326)$$

el valor de τ debe ser el cero absoluto, i como τ_1 es una temperatura dada, $(1 - \beta\,h)$ será igual a cero. Entónces:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = 0 \quad \text{o sea } \rho = 0$$

Introduzcamos en la fórmula (333) el valor de esa altura límite en funcion de la constante β.

De la ecuacion (334) sale:

$$h_0 = \frac{1}{\beta} \qquad (335)$$

La fórmula (333) se convierte en:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left(1 - \frac{h}{h_0} \right)^y \qquad (336)$$

El valor de h_0, segun las esperiencias de globos que han determinado la lei de la disminucion de τ, seria de:

$$h_0 = 50 \text{ kms.} = 50000 \text{ m.}, \beta = \frac{1}{50000}$$

Entónces:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left(1 - \frac{h}{50000} \right)^y,$$

si espresamos h en metros.

En donde:

$$y = \frac{1}{29.4\,\tau_1 \cdot \frac{1}{50000}} - 1$$

$$y = \frac{50000}{29.4\,\tau_1} - 1$$

en la suposicion de ser $g = 1$.

Para tener alguna idea de y vamos a calcular algunos valores aproximados. Para:

$$\tau_1 = 271^{o}.5 \; (t_1 = 0^{o})$$

$$y = \frac{50000}{29.4 \times 271.5} - 1 \neq \frac{50000}{8000} - 1$$

$$y \neq 6.25 - 1 \neq 5.25$$

Para $t_1 = 12^{o}$ Celsius

$$\tau_1 = 283^{o}.5$$

Se deduce:

$$y = 5$$

Con el valor de y podemos calcular la densidad ρ.

Ejemplo. — Calcular la densidad para 1, 10, 25 kms., siendo $t_1 = 12^o$ Celsius. Hemos visto que y depende de τ_1, i ya encontramos $y = 5$ para esa temperatura. Entónces:

$$\left[\frac{\rho}{\rho_1}\right] = \left(1 - \frac{h}{50}\right)^5,$$

si h son kilómetros.

La paréntesis vale para:

$$1 \text{ km.} \ldots\ldots \frac{49}{50} = 0.98$$

$$10 \text{ » } \ldots\ldots \frac{4}{5} = 0.80$$

$$25 \text{ » } \ldots\ldots \frac{1}{2} = 0.50$$

$$\text{De } \log\left[\frac{\rho}{\rho_1}\right] = 5 \times \log\left(1 - \frac{h}{50}\right)$$

resultará:

$$\text{Para } 1 \text{ km.} \left[\frac{\rho}{\rho_1}\right] = 0.904$$

$$\text{» } 10 \text{ » } \text{ » } = 0.328$$

$$\text{» } 25 \text{ » } \text{ » } = 0.031$$

espresado en unidades de la densidad de la superficie.

5. *Quinta hipótesis.* — Esta supone que la temperatura disminuye siempre por la misma progresion jeométrica con la altura. Así, por ejemplo, si la disminucion fuera 1/100 por cada kilómetro, sea:

$$\tau = 280^o \text{ a } h = 0$$

será a:

$$h = 1 \ldots \tau = 280^o - 2.80 = 277.20$$

$$h = 2 \ldots \tau = 277.20 - 2.772 = 274.428$$

La disminucion de temperatura se espresará por la fórmula:

$$\frac{d\tau}{dh} = -\beta\tau \tag{337}$$

o sea

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\beta\, dh \tag{338}$$

Integrando queda:

$$l\,\tau = -\beta h + C \tag{339}$$

Para encontrar C consideremos $h = 0$ entónces τ será la temperatura absoluta a nivel del suelo, o sea τ_1, queda:

$$C = l\,\tau_1 \tag{340}$$

Reemplazando en la fórmula anterior, tenemos:

$$l\,\tau = l\,\tau_1 - \beta h \tag{341}$$

o bien:

$$l\,\frac{\tau}{\tau_1} = -\beta h \tag{342}$$

Entónces:

$$\frac{\tau}{\tau_1} = e^{-\beta h} \tag{343}$$

Para poder aplicar la fórmula que resulta será preciso conocer el valor de β. Ahora introduzcamos el valor de la ecuacion (337) en la fórmula fundamental (306); tendremos:

$$\frac{d\rho}{\rho\, dh} = -\frac{1}{\tau}\left(\frac{g}{\gamma} - \beta\tau\right) = -\frac{g}{\tau\gamma} + \beta \tag{344}$$

Entónces:

$$\frac{d\rho}{\rho} = dh\left(\frac{-g}{\gamma\,\tau_1\,e^{-\beta h}} + \beta\right) \qquad (345)$$

puesto que:

$$\tau = \tau_1\,e^{-\beta h} \qquad (343)$$

Ahora integramos:

$$l\,\rho = \beta h - \frac{g.e^{\beta h}}{\gamma.\tau_1.\beta} + C \qquad (346)$$

Para hallar C hacemos $h = 0$. Entonces ρ será la densidad en la superficie, esto es, ρ_1 . Luego:

$$l\,\rho_1 = \frac{-g}{\gamma\,\tau_1\,\beta} + C \qquad (347)$$

$$C = l\,\rho_1 + \frac{g}{\gamma\,\tau_1\,\beta} \qquad (348)$$

Reemplazamos C en la ecuacion (346):

$$l\,\rho = \beta h + l\,\rho_1 + \frac{g}{\gamma\,\tau_1\,\beta} - \frac{g\,e^{\beta h}}{\gamma\,\tau_1\,\beta} \qquad (349)$$

$$l\,\frac{\rho}{\rho_1} = \beta h + \frac{g\left(1 - e^{\beta h}\right)}{\gamma\,\tau_1\,\beta} = -v \qquad (350)$$

Empleando esta abreviacion, sale:

$$\frac{\rho}{\rho_1} = e^{-v} \qquad (351)$$

Se determina β por esperiencias i así no habrá dificultad en calcular la densidad segun esta quinta suposicion, que da una fórmula bastante complicada.

§ 53. *Refraccion para distancias zenitales pequeñas.* — En las teorias ya tratadas hemos visto las leyes segun las cuales cambian en la atmósfera la densidad, la temperatura i la presion que son las causas de la refraccion. Ahora vamos a considerar el camino que sigue un rayo luminoso al atravesar las capas de aire. Sea, por ejemplo, E (fig. 34) un punto de la superficie de una estrella EE' i P'

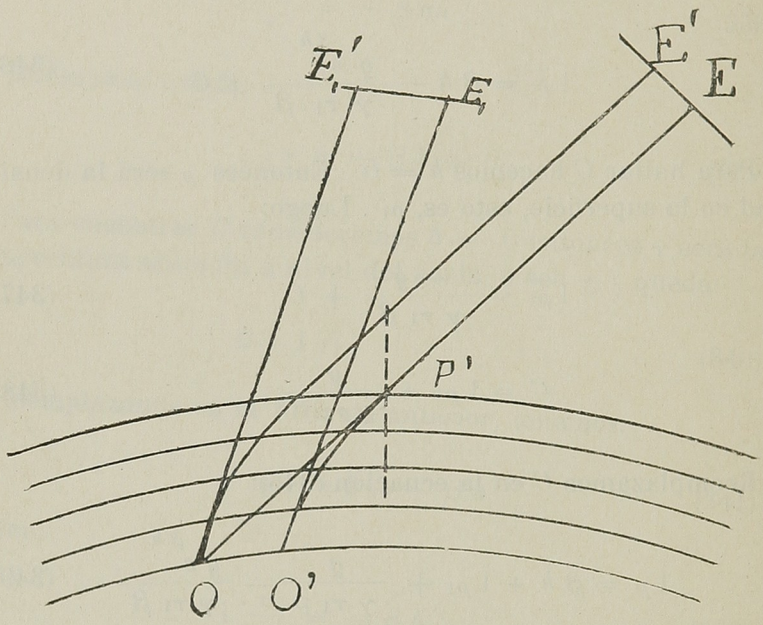

Figura 34.

el punto en que penetra el rayo; éste, al pasar del vacío a las primeras capas gaseosas, sufre una desviacion que lo acerca a la normal en el punto de penetracion; al seguir a otra capa mas densa vuelve a refractarse aproximándose otra vez a la normal. Como suponemos que las capas de aire son concéntricas, las diferentes refracciones consecutivas formarán una curva como trayectoria del rayo luminoso. Un punto O' de la superficie terrestre se veria desde la estrella en O; es decir, si con poderosos aumentos de afuera

se distinguieran detalles de nuestro planeta, se verian desplazados de su verdadera posicion. A la inversa, si observamos desde O, en la superficie de la tierra i miramos en la direccion OE no veremos el punto E de la superficie del astro sino el punto vecino E', siempre habrá un haz de rayos del astro que nos da su imájen en la direccion de la tanjente a la curva en los puntos respectivos O i O'; de tal manera que vemos al cuerpo celeste en $E_1E'_1$ mas arriba de su posicion real.

Hai una lei física que da la relacion segun la cual se des-

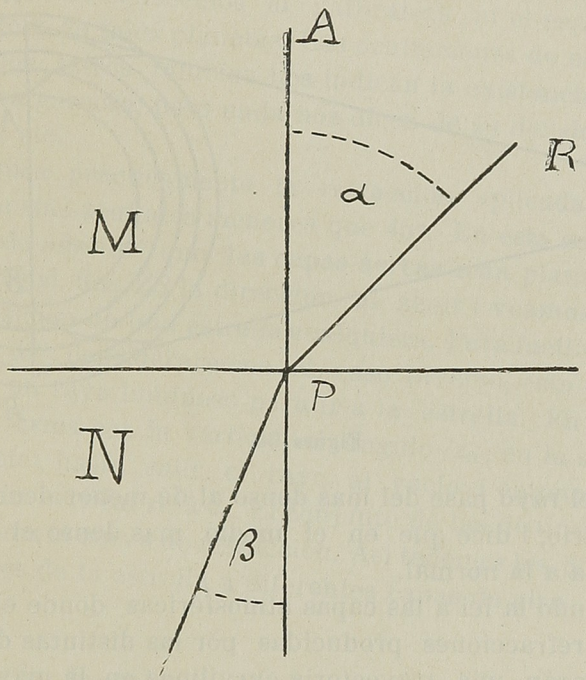

Figura 35.

vía un rayo de luz al pasar de un medio mas denso a otro de densidad menor, o vice-versa. Sea M (fig. 35) un medio a traves del cual pasa un rayo RP i N otro mas denso contíguo al primero; sea AP la normal a la superficie de contac-

to de ámbos medios. Si ν_α es el coeficiente de refraccion en M i ν_β en el medio N, la lei antedicha espresa que:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = \frac{\nu_\beta}{\nu_\alpha} \qquad (352)$$

siendo α el ángulo de incidencia i β el de refraccion. De esa fórmula se deduce que:

$$\nu_\alpha \text{ sen } \alpha = \nu_\beta \text{ sen } \beta = \text{constante} \qquad (353)$$

La lei sencilla que acabamos de espresar es jeneral, ya

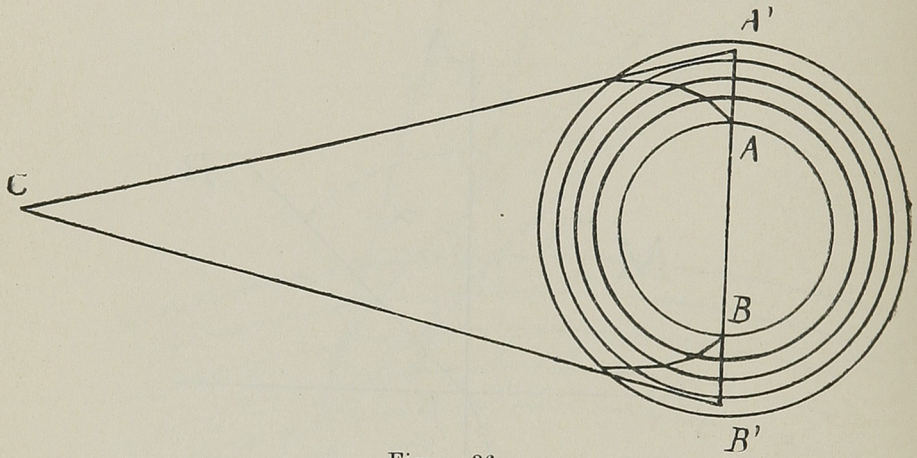

Figura 36.

sea que el rayo pase del mas denso al de menor densidad, o lo contrario; i dice que en el medio mas denso el rayo es mas cerca a la normal.

Aplicando la lei a las capas atmosféricas donde el sinnúmero de refracciones producidas por las distintas densidades formarán una trayectoria curvilínea en la mayoría de los casos, salvo aquel en que $\alpha = 0$, o sea que sen $\alpha = 0 = \text{sen } \beta$ esto es, que el radio incidente se confunde con la normal o vertical; de manera que cuando el astro pasa por el zenit, su luz no sufre refraccion. Para darnos una idea del efecto de la refraccion sobre el tamaño de los planetas rodeados de envoltura gaseosa, imajinemos que observamos la tierra desde otro cuerpo celeste (fig. 36).

Sean A i B los polos de la tierra i C el punto de donde observamos. Los rayos de luz reflejada que parten de A i B, para llegar al observador, recorren en la atmósfera la curva causada por la refraccion, siguiendo despues en el vacío la direccion rectilínea, segun la cual verá el observador los detalles A i B proyectados en la bóveda celeste, de tal suerte que veremos el diámetro AB en A' B', dilatado como por una lente de aumento, que no es otra cosa que el aire, que obra como tal. En el caso contrario, cuando observamos desde nuestro globo los planetas que tienen atmósfera como p. ej. Júpiter, Saturno, i medimos sus diámetros aparentes, no podemos saber a qué diámetros verdaderos corresponden, puesto que no conocemos la naturaleza ni el espesor de la atmósfera de tales planetas. Las ocultaciones de estrellas por dichos astros tambien nos indican la existencia de una envoltura gaseosa; pero nada nos dicen de su densidad, temperatura, etc.

Consideramos prácticamente la refraccion aplicada al caso de distancias zenitales menores que 45°. En esta suposicion se puede admitir que las capas áereas sean planas i paralelas entre sí. Sea ZS la direccion al zenit i veamos el cambio de posicion de una estrella cualquiera. Para facilitar el dibujo (fig. 37), consideraremos el caso inverso, esto es, que de S sale un rayo luminoso para ir a la estrella. En la primera capa forma con la vertical el ángulo z_n; en la segunda z_{n-1}, etc., hasta salir el rayo al vacio i entónces el ángulo con la vertical será z_0. El conjunto de las distintas direcciones forma la curva de refraccion. Así tenemos las distancias zenitales de la estrella a diferentes capas de aire.

$$z_n,\ z_{n-1},\ \ldots\ldots\ z_1,\ z_0.$$

Estas distintas distancias zenitales se pueden relacionar. Tenemos que z_0 es la distancia zenital verdadera i z_n la aparente.

Recordemos la lei de los senos i la aplicamos al caso pre-

sente. Supongamos que las capas tengan coeficientes de refraccion:

$$\nu_n, \nu_{n-1}, \ldots\ldots \nu_1, \nu_0, \text{ donde } \nu_0 = 1.$$

Obtenemos:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sen} z_0\ \nu_0 = \operatorname{sen} z_1\ \nu_1\\
&\operatorname{sen} z_1\ \nu_1 = \operatorname{sen} z_2\ \nu_2\\
&\operatorname{sen} z_2\ \nu_2 = \operatorname{sen} z_3\ \nu_3\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots\\
&\operatorname{sen} z_{n-2}\ \nu_{n-2} = \operatorname{sen} z_{n-1}\ \nu_{n-1}\\
&\operatorname{sen} z_{n-1}\ \nu_{n-1} = \operatorname{sen} z_n\ \nu_n
\end{aligned}\right\} \quad (354)$$

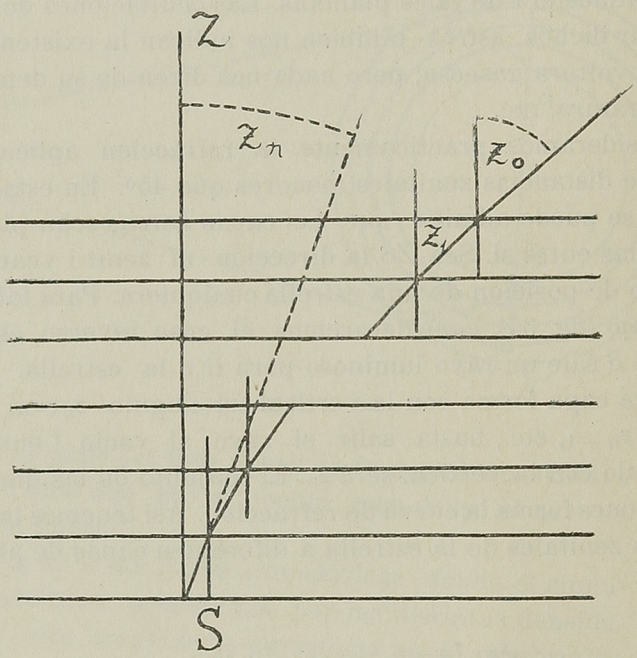

Figura 37.

Así obtenemos una cantidad infinita de ecuaciones que dan relaciones entre las diversas cantidades; pero se puede sacar de todas ellas una sola ecuacion; para esto multipli-

camos los primeros miembros entre sí i tambien los segundos miembros entre sí. Vemos que quedan factores iguales en ámbos miembros que por lo tanto se pueden suprimir i al final solo quedarán:

$$\text{sen } z_0 \, \nu_0 = \text{sen } z_n \, \nu_n \qquad (355)$$

que es la relacion de las distancias zenitales. Al suponer que las capas de aire sean planas, i paralelas al suelo, resulta una fórmula que solo considera los coeficientes de refraccion de las capas estremas i no toma en cuenta los de las capas intermedias.

Dando a (355) otra forma, se tiene:

$$\frac{\text{sen } z_0}{\text{sen } z_n} = \frac{\nu_n}{\nu_0} \qquad (356)$$

Se puede simplificar aun mas esta fórmula. En efecto, ántes de entrar el rayo a la primera capa, existe el vacio, donde no hai refraccion, es decir, el coeficiente de refraccion vale la unidad; él aumenta a medida que llegamos a capas inferiores del aire. Así obtenemos $\nu_0 = 1$, $\nu_1 > 1$, i siempre $\nu_r > \nu_{r-1}$. Reemplazando el valor de ν_0 en la fórmula, sale:

$$\text{sen } z_0 = \nu_n \text{ sen } z_n \qquad (357)$$

De las cantidades de esta fórmula sabemos que z_n es obtenido por la observacion que nos da la direccion del último rayo; ademas, ν_n está determinado préviamente por trabajos de laboratorio. Se puede simplificar todavía la fórmula. Sabemos que los ángulos z_0 i z_n no difieren mucho entre sí, i si introducimos la abreviacion R por refraccion,

que es la diferencia entre la distancia zenital verdadera i la aparente, entónces:

$$R = z_0 - z_n \qquad (358)$$

de donde:

$$z_0 = z_n + R \qquad (359)$$

Introduzcamos en (357) este valor resulta:

$$\text{sen } (z_n + R) = \nu_n \text{ sen } z_n \qquad (360$$

Desarrollamos:

$$\text{sen } z_n + R \text{ sen } 1'' \cos z_n = \nu_n \text{ sen } z_n \qquad (361)$$

puesto que cos R es casi la unidad por ser R mui pequeño.

Despejamos R:

$$R = \frac{1}{\text{sen } 1''} \cdot \frac{\text{sen } z_n \ (\nu_n - 1)}{\cos z_n} = \frac{\nu_n - 1}{\text{sen } 1''} \text{ tg } z_n \qquad (362)$$

Es costumbre abreviar, poniendo $\frac{\nu_n - 1}{\text{sen } 1''} = a$ i así queda:

$$R = a \text{ tg } z_n \qquad (363)$$

Entónces sigue la lei: *Para distancias zenitales pequeñas es la refraccion proporcional a la tanjente de la distancia zenital aparente.*

§ 54. *Valor numérico de la constante de refraccion.*— El valor numérico de $\nu_n - 1$ se ha determinado en laboratorios. No se puede construir un espacio completamente vacio que serviria para determinar la refraccion de un rayo que de allá saliera al aire de la superficie. Pero cambiando la presion del aire en tubos, por los cuales se hace pasar la luz se la determina por la lei de la constancia del poder es-

pecífico de la refraccion. Para esta lei que liga ν con la densidad ρ del aire, es la fórmula mas empleada:

$$\nu^2 - 1 = 2\,c\,\rho \qquad (364)$$

siendo c una constante. Esta lei (364) seria jeneral para todos los gases. Respecto de la constante c debemos agregar que su valor no es absoluto, sino que depende de la lonjitud de las ondas de la luz. Como sabemos, la luz que recibe el ojo no es simple sino que está compuesta de los colores del espectro, que refundidos entre sí producen la luz blanca.

La desviacion sufrida por la luz blanca a causa de la refraccion se compone pues de las desviaciones que reciben los rayos de luz simple del espectro, de manera que la imájen de un punto blanco refractado debe estenderse en una línea que muestra la consecuencia completa de todos los colores. Estudios de laboratorio han establecido que existe un cambio en el coeficiente de refraccion al pasar del rojo al violado. Diremos algunas palabras sobre las rayas oscuras que presenta el espectro, que son producidas al atravesar la luz un medio gaseoso. El espectro solar contiene gran número de estas rayas oscuras i las principales llamadas de Fraunhofer, que fué el que estudió este fenómeno por primera vez, están designadas por las letras *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*. Despues se ha descubierto que el espectro se estiende mas allá de sus límites visibles, ántes del rojo o *infra-rojo* i mas allá del violado o *ultra-violado*; esta última parte tiene gran accion química i es la que obra sobre las placas fotográficas. Cada color tiene un largo de onda determinado, disminuyendo desde el rojo al violado mas o ménos la mitad de su lonjitud; de tal manera que se puede designar el color por la lonjitud de onda que lo caracteriza. Los físicos han determinado estas lonjitudes de onda con mucha prolijidad.

Así se ha obtenido los valores de la constante c para los distintos largos de onda, por ejemplo, la del color amarillo caracterizada por la raya *D* del sodio; lo mismo para los co-

lores de las rayas C, F, G o $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$ se ha usado un tubo de Geissler con hidrójeno, que produce dichas rayas, $H\alpha$ en el rojo, H_β en el índigo i H_γ en el violado.

Que la variacion de los coeficientes ν segun los colores tiene una influencia notable a la refraccion astronómica de ciertas estrellas se mostró en 1901, cuando se descubrió una estrella nueva, Nova Persei, de color blanco al principio i en seguida roja; las posiciones encontradas por la fotografía en sus distintas fases de color acusaban un movimiento aparente de la estrella nueva con respecto a las contiguas, i este movimiento se esplicó puramente por la desigualdad de refracciones ocasionadas por el cambio de coloracion del astro.

Vamos a dar una lista abreviada de los valores de ν tomada de la enciclopedia de astronomía por W. Valentiner, tomo III_2, páj. 590.

Los valores apuntados corresponden a las rayas de Fraunhofer. El largo de onda está espresado en millonésimas de milímetros, o sea en $\mu\mu$.

Línea de Fraunhofer	Color	Lonjitud de onda en $\mu\mu$	$\nu_n - 1$
A	rojo	766.1	0.0002902
D_2	amarillo	589.0186	0.0002919
H	violado	396.8625.....	0.0002975
N	ultra-violado	327.4096.....	0.0003000

En las observaciones visuales es importante saber que el valor de ν_n correspondiente al color amarillo, que es el mejor que impresiona el ojo, es el mas adecuado para las reducciones de refraccion; para reducir placas fotográficas será preciso aplicar el coeficiente para el ultra-violado.

Apesar de la exactitud de los valores obtenidos en laboratorios, será bueno determinar astronómicamente el coeficiente de que nos ocupamos, por cuanto la atmósfera terrestre introduce factores de que están exentos los trabajos de gabinete.

De la fórmula:

$$R = a \operatorname{tg} z_n \qquad (363)$$

se puede determinar a por observaciones de la misma estrella a diferentes alturas, conociendo de antemano el valor de z_0. Si se determina el ángulo horario de cada observacion, i se calcula por las fórmulas de la trigonometría esférica z_0, con un alt azimut se observan diferentes valores de z_n. Ahora, conociendo a, es fácil determinar ν_n. Hai que notar durante las observaciones las lecturas de los instrumentos meteorolójicos, porque el valor jeneral de a varia con las condiciones atmosféricas, por ej., el estado higrométrico, que indudablemente influiria en la densidad del aire.

§ 55. *Refraccion en grandes distancias zenitales.*—Hemos supuesto en el § 53 capas planas paralelas para la fórmula (363); pero tal suposicion es admisible solo para pequeñas distancias zenitales, a fin de que el error cometido no influya en los resultados. Veamos ahora qué diferencia existe entre la aproximacion adoptada i el caso verdadero, esto es, de capas esféricas concéntricas a la superficie. Sea ES (fig. 38) un rayo de luz que al penetrar en la primera capa se refracta acercándose a la normal, que es ahora el radio terrestre prolongado hasta el punto de incidencia R, miéntras nosotros tomamos R' como tal punto. Ambas normales, la que hemos considerado ($R'Z'$) a las capas planas i la de capas esféricas (RZ'') forman entre sí un ángulo ϵ, que se mide en el centro de la tierra. Si suponemos que el aire cesa de refractar la luz a la altura de 15 kilómetros,

en donde está sumamente rarificado, i si partimos, p. e., de un valor de $z_n = 45°$, encontraremos el valor de ϵ, que es

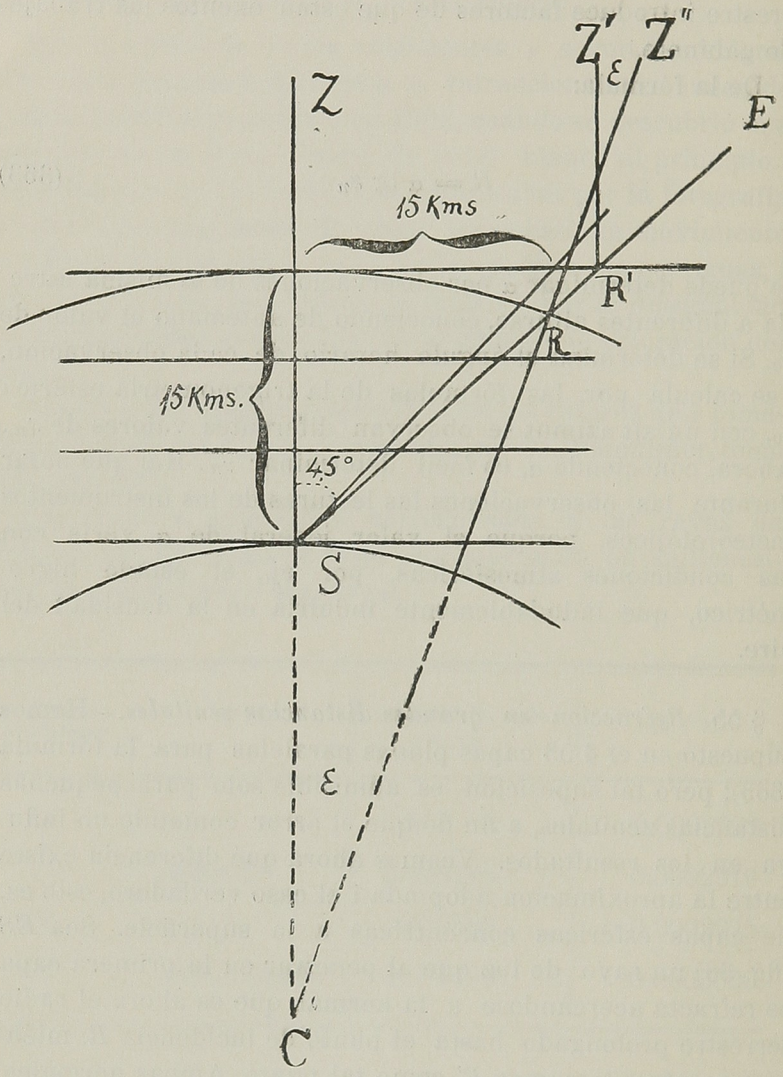

Figura 38.

la diferencia entre la distancia zenital verdadera a capas esféricas *ERZ''* i a capas planas *ER'Z'*.

En la fig. 38 vemos que el punto de incidencia dista de

la vertical del punto S mui cerca de 15 kilómetros i así sale que:

$$\text{tg}\,\epsilon = \frac{15 \text{ kms.}}{r + 15 \text{ kms.}} = \frac{15}{6392} = \frac{1}{426}$$

de donde $\epsilon \neq 8'$.

Así vemos que el valor de z_0 es falso de 8'. En vista de la ecuacion (357) se desprende que el cambio en z_n es casi el mismo i si nombramos el error de la refraccion R', tendremos que:

$$R' = a \sec^2 z \text{ tg } 8' = 2\, a. \text{ tg } 8' \qquad (365)$$

i como:

$$a = \frac{\nu_n - 1}{\text{sen } 1''} = 57''.3 \qquad (366)$$

saldrá:

$$R' = 2. \frac{57''.3}{426} = 0''.28 \qquad (367)$$

que será el error de la refraccion calculado por la sencilla fórmula (363) que considera las capas planas para $z_n = 45^o$.

Por esta razon vemos que a lo ménos desde mas allá de 45° de distancia zenital debe tomarse en cuenta la superficie esférica de la atmósfera, i ademas será menester agregar otros términos que hacen variar a a causa de las condiciones atmosféricas.

Ahora estenderemos nuestras consideraciones tomando en cuenta tambien el cambio de direccion del rayo infinitamente pequeño al ir de una a otra capa curvada de ínfimo espesor. Si ν es el coeficiente de refraccion de una capa, $\nu + d\nu$ será él de la próxima i en la primera capa se ten

drá una distancia zenital z i en la segunda $z + dz$. Aplicamos la lei obtenida i resulta:

$$\frac{\text{sen } (z + dz)}{\text{sen } z} = \frac{\nu}{\nu + d\nu} \tag{368}$$

Desarrollamos:

$$\frac{\text{sen } z + dz \cos z}{\text{sen } z} = \frac{\nu}{\nu + d\nu} \tag{369}$$

o sea:

$$1 + dz \cot z = 1 - \frac{d\nu}{\nu} \tag{370}$$

$$dz = -\frac{d\nu}{\nu} \text{ tg } z \tag{371}$$

que nos da la variacion de la distancia zenital en capas vecinas por la refraccion. Para obtener el cambio total de dicha distancia hai que agregar el ángulo pequeño dz_1, que existe entre las líneas verticales de ámbos puntos, el de la entrada i el de la salida del rayo en la capa infinitamente delgada.

Estudiemos el valor de $d\nu$, la variacion de la refraccion de una capa a otra.

La física supone como lei, entre el índice de refraccion de un gas i su densidad la fórmula:

$$\nu = 1 + c\rho, \tag{372}$$

que puede reemplazar la mas seria de (364) i de que sigue:

$$d\nu = c\, d\rho \tag{373}$$

Entónces dividiendo (373) por (372) obtenemos:

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{c}{1 + c\,\rho}\, d\rho \qquad (374)$$

que reemplazado en (371), da:

$$dz = - \frac{c}{1 + c\,\rho}\, d\rho \,\mathrm{tg}\, z \qquad (375)$$

Se puede simplificar algo esta espresion: el valor de ρ cambia desde ρ_1 a la superficie de la tierra hasta el límite superior de la atmósfera en donde es cero segun una de las cinco hipótesis del § 52; sin error apreciable se puede reemplazar la pequeña espresion al lado de 1 en el denominador usando el promedio de los distintos valores de ρ, o mejor el promedio de los valores máximo i mínimo:

$$\rho \neq \frac{\rho_1 + 0}{2} = \frac{\rho_1}{2} \qquad (376)$$

De modo que la fórmula (374) se convierte en:

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{c}{1 + \frac{1}{2}\, c\ \rho_1}\, d\rho \qquad (377)$$

Hagamos:

$$\frac{c}{1 + \frac{c}{2}\, \rho_1} = C \qquad (378)$$

entónces C es conocido. La fórmula (375) es entónces:

$$dz = - C\, d\rho \,\mathrm{tg}\, z \qquad (379)$$

i espresa la refraccion en cada una de las capas infinitamente delgadas dependiente de la densidad del aire allí contenido.

La integracion de (379) da el cambio total de direccion del rayo luminoso a consecuencia de la refraccion.

Si z representa la distancia zenital afectada por la refraccion i z_0 la verdadera, $z - z_0$ será igual a la integral:

$$z - z_0 = - C \int_0^{\rho_1} d\rho \operatorname{tg} z \qquad (380)$$

tomado entre los límites de la densidad ρ_1 i 0.

Como no conocemos la relacion que une ρ con z, solo se puede decir que para distancias zenitales pequeñas no introduciremos error apreciable tratando z bajo la integral como constante i obtendremos un valor aproximado:

$$z - z_0 \neq - C \operatorname{tg} z \int_0^{\rho_1} d\rho \qquad (381)$$

i esta integral vale simplemente ρ_1 ; queda pues:

$$z_0 - z \neq C \rho_1 \operatorname{tg} z \qquad (382)$$

i como este valor no es exacto agregaremos un factor m para que subsista la ecuacion:

$$z_0 - z = m. C \rho_1 \operatorname{tg} z \qquad (383)$$

El factor m será < 1, pero mui cercano de la unidad i dependerá el mismo de la distancia zenital. Hai grandes desarrollos teóricos para determinar el valor de m; pero nosotros vamos a ahorrarlos i solo adoptaremos el resultado. Se ha demostrado que:

$$m = 1 - \alpha \sec^2 z + \beta \sec^4 z - \ldots\ldots \qquad (384)$$

en donde α i β pueden determinarse por largos desarrollos segun las teorías del cambio de ρ con la altura o mejor por observaciones. Vemos que esta fórmula solo influye en dis-

tancias zenitales grandes donde sec z es grande; así, p. ej., para $z = 80^{\circ}$ cos $z \neq \frac{1}{6}$ i entónces sec $z \neq 6$, $\sec^2 z \neq 36$ i $\sec^4 z \neq 1300$. Por esta razon es costumbre astronómica despreciar α i β hasta 45° de distancia zenital i considerar $m = 1$. Entónces resulta hasta 45° la fórmula ya tratada:

$$z_0 - z = R = C\,\rho_1\,\text{tg}\,z = (\nu - 1)\,\text{tg}\,z \qquad (358)\ (382)\ (385)$$

En cuanto a α i β mismos hai teorías de los diversos astrónomos, p. ej., los arriba aludidos que dan valores de m dependientes de z, i como la refraccion misma depende de tg z cada uno de ellos ha dado tablas que contienen como argumento la distancia zenital.

§ 56. *Construccion de tablas.*—Respecto de la construccion de las tablas hai que tomar en cuenta que ρ_1 no es una constante puesto que depende de la temperatura i presion barométrica que anotamos durante la observacion. Recordaremos que:

$$\rho_1 = \frac{p}{\gamma\,\tau_1} \qquad (299)$$

Por eso en la fórmula:

$$z_0 - z = m\,C\,\rho_1\,\text{tg}\,z \qquad (383)$$

tenemos que introducir las cantidades de que depende ρ_1, temperatura i presion. Hai tablas que tambien consideran la humedad del aire, como, p. ej, las dadas recientemente por De Ball, Director del Observatorio de Ottakring, en Viena. Ya sabemos el valor de la constante γ i cuyo valor recíproco es $\frac{1}{\gamma} = 0.35111$. Fuera de esto, en lugar de p se ha introducido la altura del barómetro referida a la altura normal de 760 mm.

Sea $B = \frac{b}{760}$, entónces:

$$\rho_1 = \frac{p}{\gamma\,\tau_1} = \frac{0.35111\ B}{\tau_1}$$

Newcomb en su «Compendium of spherical Astronomy, New York 1906» agrega todavía a las fórmulas el influjo de la gravedad; pero nos parece que es mejor correjir la altura del barómetro por la gravedad e introducir la altura correjida. Sobre este influjo diremos algunas palabras: en vista de la rotacion de la tierra todos los cuerpos adheridos a ella serian impelidos en el espacio, en virtud de la fuerza centrífuga; pero como esta no alcanza tales proporciones, los objetos terrestres solo se alijeran un poco, pierden algo de su peso, i naturalmente, en los polos, en donde la rotacion es nula, no hai disminucion en el peso de los cuerpos.

Como de aquí se desprende que la pesantez obra de distinta manera segun las latitudes, no solo por la rotacion sino tambien por el achatamiento polar, es necesario reducir las alturas barométricas a una latitud determinada i se elije como ésta la de 45°. Ademas la altura del mercurio será reducida a la temperatura 0° Celsius en que tambien de difiere de otros que dan tablas especiales para tomar en cuenta la temperatura que indica un termómetro unido al barómetro. Obtendremos así:

$$\rho_1 = \frac{0.35111\ B}{\tau_1} \qquad (386)$$

i la refraccion estará espresada por la fórmula:

$$R = (m.\ 0.35111.\ C)\ \text{tg}\ z\ \frac{B}{\tau_1} \qquad (387)$$

en que $B = \frac{b}{760}$, una vez correjido b por la pesantez, la temperatura, i ademas por la correccion individual del barómetro, que depende de la correccion del punto cero i de la capilaridad del tubo. Esta es la espresion completa. Hagamos:

$$m.\ C = a \qquad (388)$$

i espresado logaritmicamente obtenemos:

$$\log R = \log a + \log \operatorname{tg} z + \log B + \log \frac{0.35111}{\tau_1} \quad (389)$$

B i τ_1 se obtienen por las lecturas de barómetro i termómetro, z se observa directamente i a es tomado de tablas construidas segun la fórmula (388) i dependientes de la distancia zenital.

Cada tabla de refraccion para ser de valor práctico debe contener los términos de la fórmula (389).

Como log a depende tambien de z se dan tablas que contienen luego log (a. tg z).

Consideremos un caso práctico. Usaremos las tablas de refraccion de Albrecht. Este astrónomo propone correjir la altura barométrica por la gravedad, temperatura, error del punto cero i capilaridad. Es sabido que la parte superior del mercurio está limitada por una superficie curva i no por un plano; de manera que la verdadera altura barométrica es menor que la señalada por la parte mas alta de la columna, vemos entónces que la correccion por capilaridad es siempre negativa. Respecto del error del punto cero, diremos que proviene de una falsa colocacion de la escala barométrica, de errores de division de los trazos que se leen i en algo del diámetro variable del tubo del barómetro i que debe ser determinado comparándolo con un barómetro patron a varias presiones de aire, que se construyen artificialmente por una máquina pneumática. Jeneralmente estos errores se determinan para cada instrumento, i las correcciones que se hace a las lecturas son anotadas en tablitas ausiliares, junto con las tablas de correccion por temperatura.

Supuestas las correcciones anteriores, vamos a las tablas:

La primera tabla 31 a (páj. 249, cuarta edicion) da la refraccion media para las distancias zenitales hasta 80°, suponiendo la teoría de refraccion de Pulkova (Gyldén) pero disminuyendo el log a en 0.00085 i calculando con una altura

del barómetro de 751.5 mm. i la temperatura $t = + 9.°3$. Vemos como los valores de la refraccion suben lentamente i ya en 80° alcanzan a 5' 14."9.

La tabla 31 b da la correccion del barómetro a la gravedad normal de la latitud 45°.

La tabla 31 c (páj. 250) da los valores de log a, que como sabemos, se calculan por $a = m.\ 0.35111\ C$.

Tenemos ya $R = a\ \text{tg}\ z$, si despreciamos $\frac{B}{\tau 1}$, i el valor de a cambia con la distancia zenital. Así para 0° 0' log a = 1.75947 i los valores siguientes disminuyen; para 45° 0' log a = 1.75895 i el número correspondiente es 57."4 que se llama la constante de la refraccion para estas tablas, puesto que segun $R = a\ \text{tg}\ z$ para $z = 45°$, tg $z = 1$ i se tiene entónces $R = a$. El valor disminuye segun se ve de la fórmula $m = 1 - a\ \sec^2 z + \beta\ \sec^4 z$.

Por ejemplo, para 60° 0' log a = 1.75796 para 70° 0' log a = 1.75572; para 80° 0' log a = 1.74448. Mas allá de 80° 0' la tabla no da valores porque a tan bajas alturas hai casi siempre refracciones anómalas. Fuera de estas tablas para a existen otras ausiliares para un factor λ i ademas para uno A.

Estas constantes suponen la espresion jeneral de la refraccion:

$$\log R = \log (a\ \text{tg}\ z) + \lambda \log \gamma + A \log B, \qquad (390)$$

donde log γ depende de la temperatura del aire i log B de la presion barométrica. Para distancias zenitales menores se reduce tal fórmula a:

$$\log R = \log (a\ \text{tg}\ z) + \log \gamma + \log B \qquad (391)$$

siendo posible equiparar λ i A a la unidad. Esto se puede para λ si $z < 45°$ i para A si $z < 77°$.

Para 45° 0' el número de λ mismo vale 1.0018, a 60° 1.0044

i a 80° $\lambda = 1.0409$. En cuanto a A su valor numérico para 80° es 1.0044.

Enseguida agrega Albrecht una tabla 31 d (páj. 251 258) que contiene log (a tg z) de uno en un minuto. Para 80° 0' log (a tg z) = 2.49816 i su número es 5' 14".9.

Hai otra tabla 31 e (páj. 258) que da la correccion por temperatura del barómetro; un log T, que se agrega a log B en la fórmula jeneral, pero no la consideraremos porque preferimos correjir ántes la altura barométrica por la temperatura del barómetro sirviéndonos de una tablita ausiliar especial.

En seguida existe una tabla 31 f (páj. 259-262) que da log B, el influjo del barómetro desde 600 a 780 mm. o de 26.80 a 31.00 inches ingleses, que se agrega a log (a tg z). A log B se aplica el factor A, si z es mayor de 77°.

Despues está la tabla 31 g (páj. 263 264) para la correccion por la temperatura desde — 30° hasta + 36° de Celsius, i de 0° hasta 96° de Fahrenheit. Si se usa termómetro Fahrenheit, la conversion a grados Celsius es:

$$\text{Celsius} = \frac{F - 32}{9} \cdot 5,$$

si se usa termómetro Réaumur: Celsius $= \frac{5}{4}$ Réaumur.

§ 57. *Ejemplos.*—Se observa una estrella a la distancia zenital $z = 33° 13' 20''$ a una altura del barómetro en Santiago de 719°.71 i a una temperatura $t = 17°.2$.

En la tabla 31 d obtenemos:

		log a tg z	= 1.5755
con 31 f		log B	— 0.01877
con 31 g		log γ	— 0.01206
	Suma	log R	= 1.5447
		R	= 35".05

La distancia zenital verdadera es:

$$\zeta = 33^{o}\ 13'\ 55''.05$$

Para un gran número de estrellas de zona observadas con poco intervalo se toma la temperatura i presion de tiempo en tiempo i se las interpola para los momentos intermedios o se calcula para estos tiempos equidistantes la suma $\log B + \log \gamma$ i se interpola luego el valor de la suma para el momento de la observacion de una estrella distinta.

Agreguemos tambien para esto un ejemplo.

El 1.º de Febrero de 1911 se leyeron en el barómetro i termómetro los siguientes valores a tiempos que indica la primera columna del cuadro siguiente, distantes uno del otro de 30^{m}.

Tiempo sideral	Barómetro correjido	Termómetro Celsius	$\log B$	$\log \gamma$	$\log B.\gamma$	Diferencia
	mm					
$6^{h}\ 10^{m}$	714.86	+ 18.º7	−0.0217	−0.0143	−0.0360	
						+ 9
6 40	714.68	18. 0	218	133	351	
						+ 11
7 10	714.50	17. 2	219	121	340	
						+ 6
7 40	714.48	16. 8	219	115	334	

De las tablas se toma el $\log B$ i $\log \gamma$, se suman i se forma la diferencia en unidades de la cuarta cifra correspondiente a 30^{m}. Se observó a las $6^{h}\ 16^{m}\ 28^{s}$ una estrella que dió la

lectura del círculo	106º 5' 20".99
restándolo de $(90^{o} - \phi)$	123 26 42
da la distancia zenital	17 21 21
sacamos de la tabla 31 d: $\log (a\ \mathrm{tg}\ z)$	1.2543
e interpolamos del cuadro: $\log \gamma + \log B$	— 358
$\log R$	1.2185
R	16."54
es pues la lectura correjida por refraccion	106º 5' 4."45

§ 58. *Determinacion de declinaciones relativas.*—Si queremos determinar la declinacion de una estrella desconocida hai que observarla junto a lo ménos a una estrella conocida, que no diste de ella mucho ni en ascension recta ni en declinacion. Leemos para la estrella desconocida en el círculo L_d i para la estrella conocida L_c. Hai que aplicar primero a las lecturas el influjo del run, de los errores de division, de la flexion, de la inclinacion de los hilos de punteria i del ángulo horario (§§ 36-44). Despues hai que cal-

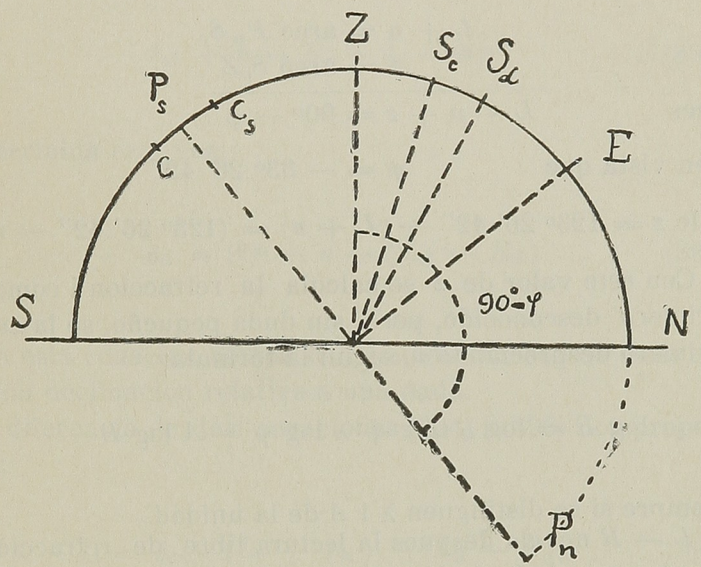

Figura 39.

cular la refraccion. Para esto hemos leido durante la observacion el barómetro i un termómetro que indica la temperatura afuera de la sala i debemos saber tambien la distancia zenital observada.

La distancia zenital conoceríamos si supiéramos qué lectura del círculo corresponde al zenit. Hai círculos donde el cero de la division corresponde al zenit, otros donde al ecuador, otros donde a uno de los polos. Siempre tendrá esta coincidencia cierta correccion que debe ser pequeña.

En el círculo meridiano Eichens del observatorio de la Quinta Normal corresponde el punto cero al polo norte i las lecturas dan aproximadamente distancias polares. Sea n la correccion del punto cero, entónces será:

$$L + n \text{ la distancia del polo norte}$$

Sea en la fig. 39 SN la direccion norte-sur, Z el zenit i S una estrella, que observamos en el meridiano. Entónces:

$$\begin{aligned} L + n &= \text{arco } P_n S_c \\ z &= \text{arco } S_c Z \end{aligned}$$

pues $$L + n + z = 90^o - \phi \qquad (392)$$

i en vista que $$\phi = -33^o\ 26'\ 42''$$

sale $z = 123^o\ 26'\ 42'' - (L + n) = (123^o\ 26'\ 42'' - n) - L$

Con este valor de z se calcula la refraccion i como n es primero desconocido, pero sin duda pequeño, se la calcula primero despreciando n, segun la fórmula:

$$\log R = \log a \operatorname{tg} z + \lambda \log \gamma + A \log B \qquad (390)$$

siempre si se distinguen λ i A de la unidad.

$L - R$ nos da despues la lectura libre de refraccion i si nombramos δ_c la declinacion de la estrella conocida que tomamos de una efeméride, entónces:

$$L_c + n - R_c + \delta_c = 90^o \qquad (393)$$

La única incógnita de esta ecuacion es n, la desviacion del punto cero. Tambien puede escribirse:

$$L_c - R_c + \delta_c = 90^o - n \qquad (394)$$

La lectura (correjida por refraccion) i aumentada por la

declinacion, da el punto verdadero del ecuador sobre el círculo, que corresponde a la lectura $90^o - n$, en lugar de 90°.

Si n es sensible hai que repetir la determinacion de z por la ecuacion (392) i repetir el cálculo de la refraccion con el nuevo valor de z.

Tambien para la estrella desconocida se determina z ya con el valor exacto de n, se calcula la refraccion correspondiente i de la ecuacion análoga a (393):

$$L_d + n - R_d + \delta_d = 90^o \qquad (395)$$

se determina esta vez:

$$\delta_d = 90^o - n - (L_d - R_d) \qquad (396)$$

Con esta ecuacion hemos solucionado la tarea de determinar una declinacion relativa a una dada.

La diferencia de las ecuaciones (394) i (396) nos proporciona:

$$\delta_d - \delta_c = (L_c - R_c) - (L_d - R_d) \qquad (397)$$

es decir, la diferencia de las dos declinaciones es igual al valor inverso de las dos lecturas (ámbas debidamente correjidas de la refraccion).

Tambien podemos escribir:

$$\delta_d - \delta_c = L_c - L_d - (R_c - R_d) \qquad (398)$$

Segun esta ecuacion basta correjir la diferencia de las lecturas por la diferencia de las refracciones. En el signo no

hai que pensar, en vista de que el ángulo entre rayos refractados es siempre menor que entre los rayos verdaderos. Pero se entiende que si la diferencia entre las declinaciones es pequeña i las estrellas se siguen lijeramente unas a las otras por el meridiano, entónces serán iguales para ámbas observaciones la temperatura i presion i basta aplicar para $R_d - R_c$ la diferencia de las refracciones medias.

En el caso práctico no nos contentaremos con una única estrella fundamental, sino que tomaremos varias para eliminar no solo los errores accidentales de observacion sino tambien los errores que todavía persisten en las posiciones de las estrellas fundamentales. A lo ménos se disminuye con varias estrellas el influjo de errores accidentales en ellas, quedando el error sistemático del sistema de fundamentales que empleamos.

Dándonos, pues, varias estrellas como punto del ecuador:

$$\begin{matrix} 90^o - n_1 \\ 90^o - n_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 90^o - n_s \end{matrix}$$

calcularemos las estrellas desconocidas con el promedio $90^o - N$, donde $N = \frac{1}{s} (n_1 + n_2 + \ldots + n_s)$.

Para tener N siempre tan pequeño, que nunca se necesite repetir el cálculo de la refraccion, se puede mover el círculo sobre el eje i apretarlo en la debida posicion. Pequeños cambios que se forman con el tiempo, tambien se eliminan moviendo un poco los microscopios por tornillos especiales.

Ejemplo.—El 6 de Julio de 1911 se observaron las siguientes estrellas fundamentales con las respectivas lecturos del círculo ya correjidos todos los errores incluyéndo los de la refraccion.

Estrella	Lectura	Decl. aparente	Punto del ecuador	Desviacion del promedio
δ Corvi	106° 1' 25."25	—16° 1' 23."04	90° 0' 2."21	+0."52
330 G Hydrae	117 50 25. 56	—27 50 23. 94	1. 62	—0. 07
γ Hydrae	112 42 25. 43	—22 41 23. 94	1. 49	—0. 20
83 Virginis	105 44 8. 05	—15 44 7. 37	0. 68	—1. 01
40 H Virginis	105 53 10. 30	—15 53 7. 86	2. 44	+0. 75
		Promedio.....	90 0 1. 69	

Una estrella de la zona observada esta noche, la número

14^h 3, da la lectura correjida del círculo	106° 9'	1.34
restando la de	90 0	1.69
obtenemos	— 16 8	59.65

como la declinacion de esta estrella resultando de la observacion de esta noche.

§ 59. *Observacion de declinacion de los planetas o cometas.* —Tales objetos mostrarán paralaje i pueden demostrar un diámetro. Si el diámetro es pequeño se apunta el centro del objeto i especialmente con un par de hilos horizontales se ofrece la posibilidad, que segmentos iguales del disco sobresalgan a ámbos lados de los hilos. Para discos grandes como la luna i el sol es menester apuntar el borde i agregar o disminuir la lectura por el valor del diámetro para obtener la declinacion del centro segun el borde observado.

Ademas es menester aumentar la declinacion así obtenida por la paralaje, que segun (220) será:

$$\delta' - \delta = - \frac{\rho\,\pi}{\triangle} [\cos\delta \operatorname{sen}\phi' - \operatorname{sen}\delta\cos\phi'\cos t]$$

i en vista que tan cerca el meridiano $t \neq 0$, se reduce a:

$$\delta' - \delta = - \frac{\rho\,\pi}{\triangle} \operatorname{sen}(\phi' - \delta) \qquad (399)$$

el valor de $\frac{\pi}{\triangle}$ nos da π' la paralaje del objeto en cuestion que publican las efemérides, ρ puede ponerse siempre = 1, si no se trata de la luna. Como la observacion da δ', obtenemos:

$$\delta = \delta' - (\delta' - \delta) = \delta' + \pi' \operatorname{sen}(\phi' - \delta) \qquad (400)$$

En el caso regular donde δ es numéricamente menor que ϕ, (para los observatorios no ecuatorianos) hai que aumentar la declinacion observada en el hemisferio norte i disminuir la en el hemisferio austral para obtener la jeocéntrica.

Estas prescripciones mucho mas sencillas que en el caso de A. R. valen tambien para la luna si no buscamos la última exactitud. [Pero la luna escluimos considerando observaciones de ella como tarea especial.]

§ 60. *Coordenadas absolutas.*—Para las estrellas fundamentales, cuyas posiciones necesitamos para determinaciones relativas disponemos de varias efemérides que dan la ascension recta i declinacion. Entre las principales nombramos el «Nautical Almanac», el «Berliner Jahrbuch», la «Connaissance des Temps» i la «American Ephemeris».

Ahora supongamos que no haya efemérides como ha sucedido cuando empezó la astronomía sus observaciones i queremos determinar las coordenadas de las estrellas, a pesar de esto. El caso no es simplemente fictivo sino se presenta hoi todavia en vista que conocemos aun las mejores posiciones de estrellas solo aproximadamente, siendo posible

siempre una determinacion todavia mas exacta, de manera que hoi mismo las posiciones de estrellas deben volver a determinarse nuevamente.

Por ejemplo, para Sirio da la efeméride de Berlin a la época 1911.0 la ascension recta $6^h\ 41^m\ 13.^s673$; sin duda, este valor no será exacto hasta la última decimal i habrá una pequeña correccion, supongamos de 0.004 segundos, entónces hai que determinarla por nuevas observaciones, sin ninguna suposicion. La tarea que se presenta es pues de encontrar coordenadas absolutas. Para obtenérlas tendremos que seguir procedimientos basados únicamente en los datos que nos suministra la naturaleza. Los astrónomos del siglo XVIII i comienzos del XIX, resolvieron el problema de fijar la posicion de las estrellas mas brillantes, fundándose en los catálogos de los antiguos, como primera aproximacion. Bradley, Bessel, Lalande i sus colaboradores disponian de valores aproximados i los mejoraron. Ahora los observatorios fundamentales tienen la tarea de garantizar las últimas cifras decimales de las posiciones i tendremos que apoyarnos en los valores aproximados conocidos.

Supongamos que no tenemos valores aproximados para las coordenadas de las estrellas; tendremos entónces que referirlas a puntos notables de la bóveda celeste. Por ejemplo, las declinaciones que se cuentan a partir del ecuador celeste i las ascensiones rectas, desde el equinoxio de primavera, no se podrán fijar directamente porque el ecuador celeste es invisible, así como el punto vernal. Este punto culmina todos los dias del año, cuando el reloj señala $0^h\ 0^m\ 0^s$ tiempo sideral, i como no existe en el cielo señal alguna que lo determine, las ascensiones rectas absolutas no podrán determinarse sino indirectamente. Por eso nos ocuparemos primero de declinaciones absolutas. Para encontrar estas coordenadas conocemos la direccion norte-sur, que fija dos puntos en el horizonte visible, tambien el polo celeste i el zenit. Los puntos norte i sur mismos no se verán bien definidos si el horizonte visible no está el del mar; observado desde un buque vemos el horizonte como un círculo perfecto. Pode-

mos en este caso tomar la altura de una estrella al horizonte, cuando ella no cambia mas, es decir, cuando la estrella culmina, los marinos toman jeneralmente la altura del sol, al mediodia contándola desde el punto norte o sur del horizonte. Tales determinaciones son absolutas, pues solo se basan en la naturaleza, pero tendrán poca exactitud por lo incierto que ofrece la línea del horizonte en el sextante.

§ 61. *Determinacion del polo.*—El *polo* celeste es el mas caracterizado de los puntos de referencia para las estrellas, siendo él el centro de sus movimientos diarios; en el hemisferio norte existe cerca del polo mismo una estrella brillante, α Ursae minoris, que facilita la determinacion del punto matemático de que hablamos; en el polo sur no hai estrellas brillantes cercanas a él; pero el movimiento diurno hace que las estrellas describan círculos en el tiempo de 24 horas siderales, de manera que pasan dos veces por el meridiano; observando las lecturas de las culminaciones superior e inferior i haciendo el promedio obtendremos la lectura correspondiente al polo.

Si tenemos en culminacion superior la lectura L_s i en la inferior L_i, la lectura del polo es evidentemente:

$$\frac{L_s + L_i}{2}.$$

El instrumento que usamos debe quedar inmóvil durante las doce horas siderales que demora la estrella entre ámbas culminaciones. La temperatura, que no será igual en ámbas determinaciones, deberá ser anotada para correjir las alturas por su influencia tomándola en cuenta en las refracciones. No siempre dispondremos de estrellas brillantes para aplicar este método en vista que una de las culminaciones suele acontecer en el dia i por esto hai que esperar una época del año en que ámbas culminaciones pueden observarse al anochecer i amanecer. En Santiago hai pocas noches mayores de 13 horas i por esto habrá que observar

poco ántes del anochecer i en los últimos minutos del amanecer. Hai dos períodos del año que sirven para observar una circumpolar en sus dos culminaciones. Hai que tener presente que la refraccion influye mucho a poca altura sobre el horizonte, resultando a veces refraccion análoga, de tal modo que será conveniente usar estrellas mui polares. Por desgracia, en el hemisferio austral no hai estrellas polares brillantes como en el hemisferio norte que tiene la Polar a poco mas de un grado del polo; en cambio existe cerca del polo sur una estrella débil de magnitud 9.5 cuya distancia se reducirá a cinco minutos del polo sur en 1940; esta estrella llamada Polarísima cabe desde 1900 con el polo dentro del campo del anteojo meridiano, i dentro de él, si está bien dirijido al polo describe su círculo diario sin salir jamas.

Con el futuro círculo meridiano de Espejo con que podrán observarse estrellas mas débiles, (si es necesario con hilos iluminados) usaremos la Polarísima para determinar el polo a cualquiera hora de la noche.

En efecto, en el triángulo PAS (fig. 40) PS es la distancia polar p, i el ángulo APS es el ángulo horario t, entónces:

$$\left.\begin{aligned} PA &= p \cos t \\ AS &= p \operatorname{sen} t \end{aligned}\right\} \qquad (401)$$

Si conocemos la A. R. aun aproximada, el reloj sideral nos da el ángulo horario t, i este, como p se determina por las observaciones repetidas mismas, da en cada momento PA, de manera que observando la lectura correspondiente a esta Polarísima A se obtiene P agregando PA.

Por este método obtendremos la declinacion de cualquiera otra estrella en relacion a la polar o la polarísima que nos da el polo del instrumento sin considerar la latitud jeográfica.

Por otra parte la estrella no describe en absoluto un círculo en torno al polo sino que su posicion cambia por precesion, nutacion i aberracion en las 12 horas entre sus

culminaciones i en rigor tendremos que tomar en cuenta estos influjos segun las efemérides.

Ejemplo. — Observamos en el círculo meridiano la estrella τ Octantis a fin de determinar la lectura correspondiente al polo.

La lectura del círculo dió para la culminacion inferior,

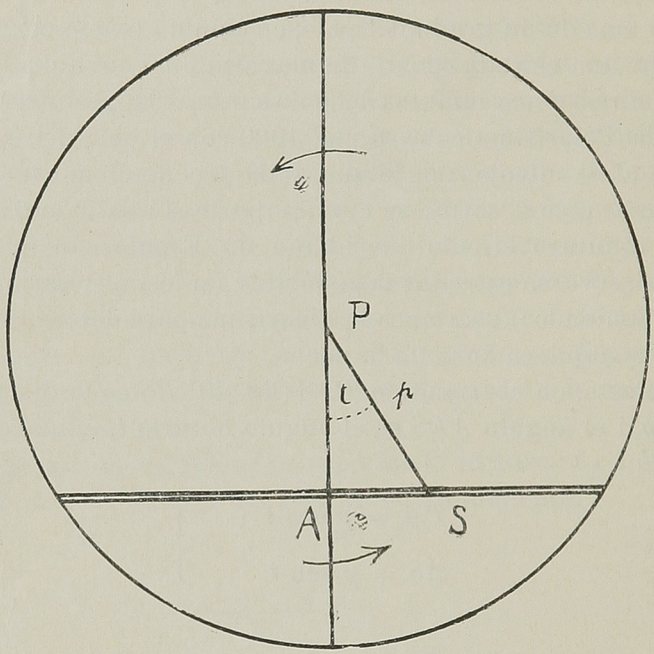

Figura 40.

despues de efectuada la reduccion de refraccion i como promedio de los seis microscopios para Junio 11 de 1911:

$$182^{o}\ 2'\ 12.''32$$

i para la culminacion superior 12 horas despues:

$$177^{o}\ 57'\ 58.''23$$

El promedio de ámbas lecturas da la del polo:

$$180^{o}\ 0'\ 5.''275$$

Pero debemos correjir esta lectura por el influjo de precesion, nutacion i aberracion. De la efeméride sacamos que el cambio de la posicion de la estrella durante el tiempo de ámbas culminaciones es de — 0.''05 para la declinacion o invertido en DPN + 0.''05.

Correjimos la lectura dada para el polo por ménos el medio la correccion obtenida o sea por — 0.''025 i así sale:

$$180^{o}\ 0'\ 5.''25$$

que es la lectura para el polo. Con esta lectura se encuentran las declinaciones de todas las estrellas quitándole 90°, o sea que para el ecuador del instrumento resulta:

$$90^{o}\ 0'\ 5.''25$$

Se nota que no necesitamos la declinacion de τ Octantis que nos daria solo determinaciones relativas sino el cambio de ella en 12 horas, cantidad pequeña que conocemos con bastante seguridad.

§ 62. *Determinacion del zenit o del nadir.*—El *zenit* es otro punto notable de la bóveda celeste i ha servido desde los primeros tiempos de la astronomía para referir a él las observaciones de estrellas. Los antiguos adaptaban a sus cuadrantes divididos, un hilo a plomo que señalaba la direccion vertical i al mismo tiempo servia de alidada; dirijian un lado del cuadrante a la estrella que observaban i el hilo de la plomada indicaba la distancia zenital que se leia en el limbo graduado.

Hoi dia procedemos a observar el nadir, punto diametralmente opuesto al zenit i para eso se coloca debajo del meri-

diano un baño de mercurio que refleja la imájen del sistema de hilos. Resulta entónces que cuando coincide la imájen reflejada con la obtenida directamente dentro del ocular, el anteojo se halla colocado verticalmente. Leemos en el círculo i así obtendremos la lectura correspondiente al nadir.

La iluminacion de los hilos requiere un ocular especial llamado *ocular gaussiano*. Este consiste en un tubo con un orificio lateral que deja pasar una fuente de luz que va a reflejarse sobre un espejo a 45° agujereado en el centro a la manera de un diafragma, como se ve en la fig. 41. La

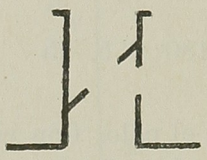

Figura 41.

luz que se refleja en el espejo ilumina desde atras los hilos, recorre despues el tubo del círculo meridiano i llega al baño de mercurio; entónces los hilos aparecen reflejados en su superficie i vemos su imájen oscuro al lado de los hilos mismos.

Vamos a decir algunas palabras sobre la iluminacion interior del anteojo meridiano. Uno de los muñones está perforado i deja pasar la luz que va a reflejarse en un pequeño espejo plano colocado al interior del cubo; éste refleja la luz hácia el ocular e ilumina así el campo en que los hilos aparecen negros. Como es tan pequeño el espejo, los rayos de las estrellas no sufren interrupcion al pasar del objetivo al ocular. Con una palanca esterior se hace cambiar la inclinacion del espejo hasta que la luz penetre entre el tubo esterior i un tubo interior i llega así cerca del ocular donde 4 prismas la desvian perpendicularmente i la echan a los hilos, que ahora aparecen brillantes en un campo oscuro.

Observando el nadir la coincidencia entre los hilos directos i reflectados no puede observarse exactamente por ser los hilos reflejados ménos gruesos i no tan definidos como los hilos vistos directamente, por eso es mejor colocar los hilos, moviendo el anteojo con el tornillo tanjencial, de manera que la imájen reflejada quede al lado de la imájen directa al *minimum visibile*, esto es, dejen un espacio de luz tan fino como sea posible. Si hai dos hilos mui juntos, se colocarán a uno i otro lado de la imájen directa, de modo que los intervalos entre ellos sean iguales; la fig. 42 da una

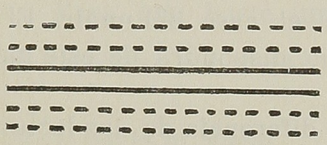

Figura 42.

idea de tal procedimiento. Se lee entónces el círculo para ámbas posiciones i se toma el promedio que da el nadir.

El punto zenital, es decir, la lectura correspondiente al zenit, se encuentra a 180° de la lectura del nadir. Sea la lectura nadiral 303°, entónces la lectura zenital es 123°.

Al mismo tiempo se puede determinar la distancia en segundos de los dos hilos horizontales de que tratamos, porque las dos lecturas hechas al estar las imájenes reflejadas a ámbos lados de la imájen directa, difieren entre sí por el *doble* de su distancia en segundos, de suerte que la mitad de la diferencia de lecturas será la distancia en segundos de los hilos. (En la figura 42 aparece la distancia de ámbas imájenes reflejadas en el cuadruple de la distancia orijinal. Pero en vista que se trata de imájenes reflejadas se comprende que la inclinacion del tubo solo es la mitad del ángulo recorrido por la imájen, de manera que las lecturas del círculo se difieren por el doble de la distancia orijinal). Esto es importante conocer por cuanto habrá casos en que la estrella

esté mal apuntada, i ya hecha la lectura del círculo por el ayudante, notará el observador que ella no recorra por la línea media de ámbos hilos sino que esté mas cerca de uno de ellos; en este caso el observador puede estimar la distancia de la estrella a los hilos i puede indicar con esto una mejora de la lectura de declinacion.

Ahora se empieza a introducir un método para determinar el zenit directo que consiste en colocar sobre el instrumento un semi-toro hueco i que contiene un baño de mercurio que soporta en su superficie un vidrio ennegrecido que flota i forma así un plano horizontal; esta placa refleja la imájen de los hilos observados por un ocular gaussiano i se procede como en el caso del nadir. El nuevo meridiano Repsold de Espejo dispondrá de este método para hallar el zenit.

Sabemos que la diferencia de las lecturas correspondientes al zenit i al polo es $90^o + \phi$. Si L_p es la lectura correspondiente al polo i L_z la del zenit, tendremos:

$$L_p - L_z = 90^o + \phi. \qquad (402)$$

Si determinamos pues por el método del § 61 la posicion del polo i por el del actual la del zenit, esto nos dará la determinacion absoluta de la altura del polo, i en posesion de este valor podemos entónces encontrar las declinaciones absolutas tambien de estrellas no circumpolares.

Para una estrella cualquiera que observamos despues de haber determinado la posicion del zenit para la noche será:

$$L_z - L_s = \pm z \qquad (403)$$

la distancia zenital de la estrella de donde sale:

$$\delta = \phi \pm z \qquad (404$$

donde el signo $\left\{\begin{matrix}\text{superior}\\\text{inferior}\end{matrix}\right\}$ vale al $\left\{\begin{matrix}\text{Norte}\\\text{Sur}\end{matrix}\right\}$ del zenit

Supongamos ϕ conocido, por ej., para Santiago:

$$\phi = -33^{\circ}\ 27'$$

i sea:

$$z = \quad 10^{\circ}\ 15'$$

Entónces $\delta = \left\{\begin{matrix}-23^{\circ}\ 12'\\-43\ \ 42\end{matrix}\right\}$ si la estrella culmina al $\left\{\begin{matrix}\text{Norte}\\\text{Sur}\end{matrix}\right\}$ del zenit. Para que baste una única fórmula $\delta = \phi + z$, vamos a dar signo a z. Será:

$+ z$ hácia el Norte

$- z$ » » Sur

i entónces obtenemos para el segundo caso si z es negativo:

$$\begin{array}{l}\phi = -33^{\circ}\ 27'\\ z = -10\ \ 15\\ \hline \delta = -43\ \ 42\end{array}$$

§ 63. *Puntos norte i sur del horizonte.* — Respecto de los puntos Norte i Sur diremos que ellos se fijan por medio de colimadores. Estos colimadores son anteojos que deben tener un tubo exactamente cilíndrico a fin de que al jirar en torno de su eje central no cambie la altura del punto de interseccion de los hilos. Para colocarlo horizontal se nivela, montando sobre el tubo un buen nivel; lo mismo se hace con el otro colimador. Para comprobar si hai error de colimacion en el colimador, dirijimos el círculo meridiano en posicion horizontal hácia el colimador i hacemos coincidir el cruce de los hilos del círculo meridiano con

los del colimador, i ahora jirando éste, la coincidencia debe subsistir; si no subsiste hai que cambiar la posicion del retículo por su tornillo de correccion hasta que lo suceda; hecho esto, el otro colimador debe dar iguales resultados para considerarlo exento de error de colimacion. Lo espuesto que está un colimador a diversos accidentes que lo hacen cambiar de posicion, tiende a que estos instrumentos sean ya de poco uso para juzgar la horizontalidad del anteojo principal. En el caso de existir un colimador, la lectura del punto Norte se hará verificando la coincidencia ya espuesta de ámbas cruces de los micrómetros; pero como casi nunca estará el colimador perfectamente horizontal se coloca ántes de leer el círculo un nivel que acuse la falta de horizontalidad del tubo; la lectura del nivel indica entónces la inclinacion del tubo que puede convertirse en segundos i correjir la lectura del círculo.

Si un círculo meridiano está provisto de sus dos colimadores bien arreglados, las lecturas del círculo dirijiéndolo al colimador boreal indican el punto que corresponde al horizonte boreal o sea a una distancia del polo Norte de $-\phi$, el otro colimador facilitará la lectura que deberia ser $180^o - \phi$, i se encuentra la pequeña correccion de ámbos puntos por error de orientacion.

Tambien de esta manera se puede obtener la declinacion absoluta de cualquiera estrella simultáneamente observada. Tenga ella la lectura L (correjida por refraccion, etc.), entónces, si L_n es la lectura del colimador boreal:

$$L - L_n = 90^o - z = 90^o + \phi - \delta \qquad (405)$$

de manera que:

$$\delta = 90^o + \phi - (L - L_n) \qquad (406)$$

ϕ debe ser conocido, sea por observacion del punto de

polo austral (L_p) i del zenit (L_z) o solo del punto del polo i de los puntos del horizonte, en vista que:

$$L_p - L_n = 180^o + \phi$$

i $$L_s - L_p = -\phi$$

de donde viene $$L_s - L_n = 180^o$$

La observacion contínua del polo del instrumento por ámbas culminaciones de las estrellas circumpolares se hace dificilísima en el hemisferio austral por falta de estrellas de bastante brillo. Miéntras el hemisferio boreal dispone de α Ursae minoris de la magnitud 2.0, $\delta = +\ 88^o\ 50'$, que se divisa tambien en instrumentos de menor tamaño, aun durante el dia, no hai estrellas de tal magnitud cerca del polo austral.

La mas brillante estrella circumpolar de nuestro hemisferio es la δ Octantis en:

$$14^h\ 13^m - 83^o\ 16'\ (1912.0)$$

de magnitud 4.^{m}1. Se puede esperar que el nuevo círculo meridiano de Repsold de 190^{mm} de abertura, cuya instalacion en Espejo es de pocos meses mas, sea capaz de mostrar esta estrella tambien en pleno dia.

Así se *estableceria* una supervijilancia contínua del polo del instrumento por ámbas culminaciones de δ Octantis, supervijilancia que nunca cesaria miéntras que con otras estrellas circumpolares solo durante pocas noches de invierno nos seria posible observar la culminacion inferior i superior, es decir, cuando una tiene lugar poco despues del anochecer i la otra antes del amanecer, suponiendo que la noche dure mas de 12 horas.

§ 64. *Determinacion de la oblicuidad de la eclíptica.*—En el párrafo anterior hemos visto que empleando la direccion vertical, proporcionada por un espejo de mercurio i el movimiento diario de la bóveda celeste, que fija el punto de

BIBLIOTECA NACIONAL
SECCION CHILENA

calma, el polo, determinado por observaciones idóneas, nos es dado determinar declinaciones absolutas.

No es tan fácil la observacion de ascensiones rectas absolutas, es decir, derivar la segunda coordenada de una estrella sin suposicion alguna.

El punto cero de las ascensiones rectas o el punto de aries está perfectamente caracterizado teóricamente. Es el corte del ecuador celeste i de la eclíptica i si estuviese marcado en la bóveda celeste, por una estrella p. ej., seria fácil determinar ascensiones rectas, observando la diferencia entre los pasajes de este punto cero i de la estrella en cuestion por medio de un instrumento bien correjido i un reloj de primera clase.

En vista de no ser visible el punto de aries durante nuestras observaciones, hai que deducir su posicion por observaciones fundadas en su definicion teórica.

El sol describe en el curso de un año perfectamente el círculo máximo de la eclíptica, si despreciamos las pequeñas perturbaciones que sufre éste en su camino por la atraccion de los planetas o, si las tomamos en cuenta fundándonos en las teorías del sol, sea de Leverrier o de Newcomb, que sin duda son suficientes para permitir la reduccion del centro del sol observado a la eclíptica, suministrando su latitud (que raras veces sobrepasa 1").

Entónces sabemos que el sol pasa por el punto de Aries si la observacion nos da su declinacion cero i si al mismo tiempo, en los dias precedentes, su declinacion era negativa; i que pasa por el punto de otoño (ascension recta = 180°), si las declinaciones anteriores eran positivas. Si la observacion del sol nos diera pues la declinacion 0° 0' 0", tendríamos el uno de estos puntos cardinales i la observacion de estrellas antes o despues en el mismo dia (que seria el 21 de Marzo o el 23 de Setiembre), nos daria directamente la ascension recta de aquellas.

Seria una enorme casualidad encontrar la declinacion del sol que observamos por los métodos espuestos en los §§ 61-63 cabalmente 0° 0' 0".

Sin duda debe pasar el sol dos veces por año por esta de-

clinacion, pero cuando lo hace puede encontrarse en un meridiano de la tierra donde no hai observatorio.

Cierta reflexion teórica nos indica, sin embargo, el camino que hai que seguir.

Entre la declinacion D, la ascension recta del sol A i la oblicuidad de la eclíptica ϵ existe una relacion sencilla, que nos revela la figura 43. Si Υ es el punto de Aries, el triángulo $\Upsilon \odot R$ nos da:

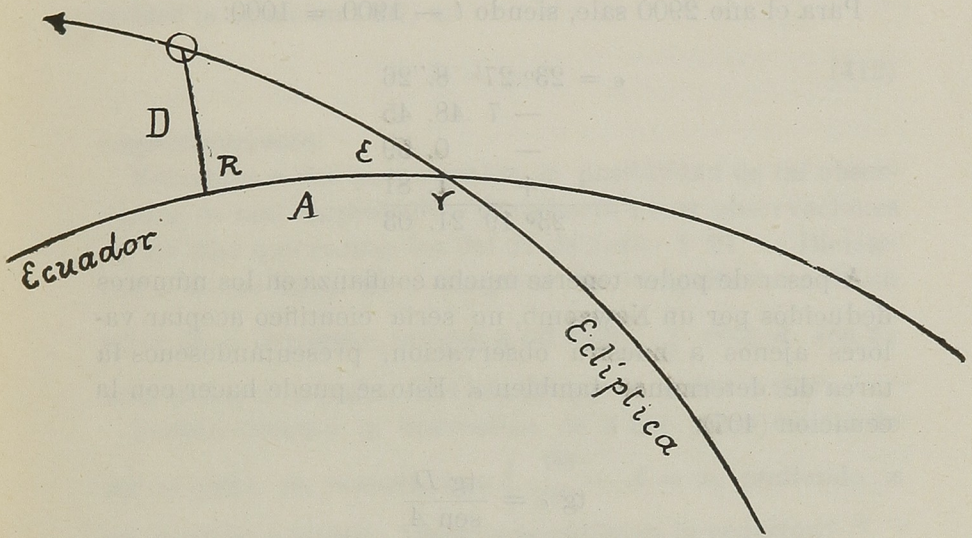

Figura 43.

$$\text{tg } \epsilon = \text{tg } D : \text{sen } A \qquad (407)$$

o

$$\text{sen } A = \frac{\text{tg } D}{\text{tg } \epsilon} \qquad (408)$$

de manera que la ascension recta del sol seria conocida, si observamos su declinacion, lo que podemos hacer (§ 62) en cada culminacion, si conociésemos la oblicuidad ϵ. Para este valor dá la teoría de Newcomb:

$$\epsilon = 23^{\circ}\ 27'\ 8.''26 - 0.''46845\ (t-1900) - 0.''00000059\ (t-1900)^2$$

$$+0.00000000181\ (t-1900)^3$$

donde t es el año de nuestra era, i si buscamos ϵ, p. ej., para 1911, tendríamos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1900} &= 23^{\circ}\ 27'\ 8.''26 \\ 11 \times 0.46845 &= \quad -\ 5.''153 \\ \hline \epsilon_{1911} &= 23^{\circ}\ 27'\ 3.''11 \end{aligned}$$

en vista de que los miembros siguientes al segundo son sin influencia.

Para el año 2900 sale, siendo $t - 1900 = 1000$:

$$\begin{aligned} \epsilon = 23^{\circ}\ 27'\ &8.''26 \\ -\ 7\ &48.\ 45 \\ -\ &0.\ 59 \\ +\ &1.\ 81 \\ \hline 23^{\circ}\ 19'\ &21.''03 \end{aligned}$$

A pesar de poder tenerse mucha confianza en los números deducidos por un Newcomb, no seria científico aceptar valores ajenos a nuestra observacion, presentándosenos la tarea de determinar tambien ϵ. Esto se puede hacer con la ecuacion (407):

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{\operatorname{tg} D}{\operatorname{sen} A}$$

observando D, si conociésemos A. Pero ahora parece que nos movemos en un círculo. Primero queremos determinar A si conociésemos ϵ, i despues ϵ si conociésemos A.

Sin embargo, es viable el último camino, dado el caso que hai momentos donde cualquier incertidumbre en A no influye de ninguna manera el cálculo de ϵ.

Si diferenciamos la ecuacion (407) logarítmicamente, resulta:

$$\frac{\sec^2 \epsilon}{\operatorname{tg} \epsilon}\, d\epsilon = \frac{\sec^2 D}{\operatorname{tg} D}\, dD - \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}\, dA \qquad (409)$$

o

$$\frac{2\, d\epsilon}{\operatorname{sen} 2\, \epsilon} = \frac{2\, dD}{\operatorname{sen} 2\, D} - \operatorname{cotg} A\, dA \qquad (410)$$

Vemos pues que:

$$\frac{d\,\epsilon}{d\,A} = -\frac{1}{2}\,\text{cotg}\,A.\,\text{sen}\,2\,\epsilon, \qquad (411)$$

una espresion, que desaparece completamente si A es igual a 90° o 270° o sea $= 6^h$ o 18^h. El sol se encuentra entónces en su solsticio vernal o invernizo. Observando la declinacion del sol en estos momentos, obtenemos con ella la oblicuidad de la eclíptica, porque para $A = 6^h$ o 18^h se reduce la ecuacion (407) a:

$$D = \pm\,\epsilon \qquad (412)$$

respectivamente.

Volvemos a ver que tambien la posibilidad de tal observacion es mui improbable. Pero basta hacer observaciones en los dias que rodean los del 21 de Junio i 21 de Diciembre a ámbos lados para asegurar la insignificancia de un error de A supuesto, porque a tal fecha $\frac{1}{2}\,\text{cotg}\,A.\,\text{sen}\,2\,\epsilon$ será siempre pequeño, en vista de que $A \neq 90°$ o 270°.

Denominemos x la desviacion de A del valor exacto de 90° (o 270°), de manera que $\left\{\begin{matrix} 90° \\ 270 \end{matrix}\right. - A = x$, pudiendo x ser tambien negativo, tendremos entónces la ecuacion:

$$\text{tg}\,\epsilon = \pm\,\frac{\text{tg}\,D}{\cos x} \qquad (413)$$

i usando el desarrollo ya muchísimas veces empleado, contenido en el § 16, tendremos:

$$\epsilon = \pm\left(D + \text{tg}^2\frac{x}{2}\,\text{sen}\,2\,D + \frac{1}{2}\,\text{tg}^2\frac{x}{4}\,\text{sen}\,4\,D + \ldots.\right) \qquad (414)$$

Cada observacion de la declinacion del sol cerca de sus solsticios nos proporciona pues una ecuacion para obtener

la oblicuidad, aun si conocemos solo aproximadamente el pequeño valor de x por las tablas existentes del sol. De estas tablas obtenemos con el momento de la observacion la ascension recta de ella. Ademas adquirimos el valor de la latitud del sol B.

Con este valor de B hai que correjir la declinacion observada para calcular aquel valor que hubiera correspondido a la posicion no perturbada del sol en la eclíptica. Recordando los desarrollos de la clase de 1909 encontramos, que si restamos $\frac{\cos \epsilon}{\cos D} B$ de la declinacion observada, obtenemos la que correspondiese al sol no perturbado.

Tomando el promedio de los valores de ϵ calculados por varias observaciones del sol algunos dias ántes i despues de un solsticio, se obtiene el valor de la oblicuidad para éste i si volvemos a hacer las observaciones medio año mas tarde de la misma manera, encontraremos el valor de ϵ para el próximo solsticio. Ambos valores no deben ser iguales sino que el segundo debe ser en 0."234 mas pequeño que el primero a causa de la variacion secular de la oblicuidad. Ademas, ámbos estarán afectados por errores de observacion i el proceder mas apropiado para hallarlos es observando durante muchos años, cada año los dos solsticios i sacando del conjunto de los valores obtenidos el valor mas probable de la oblicuidad i de la variacion secular segun el método de los cuadrados mínimos.

Dependen las observaciones del conocimiento exacto de la latitud ϕ, porque observando z del sol obtenemos D por $z + \phi$. Suponiendo pues que ϕ necesite la correccion $\triangle \phi$ D necesitará la $\triangle D = \triangle \phi$ i ϵ la correccion:

$$\triangle \epsilon = \frac{\text{sen } 2\,\epsilon}{\text{sen } 2\,D} \cdot \triangle D = \frac{\text{sen } 2\,\epsilon}{\text{sen } 2\,D} \triangle \phi \qquad (415)$$

Tomando el promedio de todas las observaciones de un solsticio vernal saldrá el factor de $\triangle \phi$ un poco mayor que $+ 1$, porque D es casi igual pero algo menor que ϵ. Al con-

trario, en el próximo solsticio invernizo obtendremos un factor un poco mayor que — 1, en vista de que $D \neq -\epsilon$.

Designando el factor por a, nos da el solsticio vernal:

$$\epsilon\,(\text{verd, vern}) = \epsilon\,(\text{obs, vern}) + a_v \,.\, \triangle\,\phi \qquad (416)$$

i el solsticio invernal:

$$\epsilon\,(\text{verd, inv}) = \epsilon\,(\text{obs, inv}) + a_i \,.\, \triangle\,\phi \qquad (417)$$

de donde sacamos:

$$\triangle\phi = \frac{\epsilon\,(\text{verd, inv}) - \epsilon\,(\text{verd, vern}) + \epsilon\,(\text{obs, vern}) - \epsilon\,(\text{obs, inv})}{a_i - a_v} \qquad (418)$$

donde el denominador es un poco mayor que—2. Ahora sabemos que ϵ (verd, inv) $-$ ϵ (verd, vern) $=$ — 0."234, por ser la mitad de la variacion anual i así vemos que $\triangle\,\phi$ sale perfectamente determinado por la ecuacion.

Una vez conocido $\triangle\,\phi$, se corrije ϵ por el influjo del valor erróneo segun las ecuaciones (416) i (417).

Ademas, veremos que la marcha anual del sol nos proporciona de esta manera un nuevo método absoluto de asegurar la latitud del observatorio, que debemos agregar a los espuestos en la páj. 224.

Está a la vista que si observamos la distancia zenital del sol en ámbos solsticios z_v i z_i, que entónces es:

$$-\phi = \frac{z_v + z_i}{2} \qquad (419)$$

porque el ecuador divide simétricamente ámbos estremos, que el sol puede alcanzar en declinacion, siempre si tomamos en cuenta la diferencia — 0."234 por la variacion secular de la oblicuidad i la latitud del sol.

§ 65. *Determinacion de ascensiones rectas absolutas.* —Ahora, si suponemos conocida la oblicuidad de la ecliptica, po-

demos proceder a encontrar la solucion de nuestra tarea de determinar ascensiones rectas absolutas.

Si pasa el sol por el meridiano, lo apuntamos en declinacion, pero al mismo tiempo observamos los pasajes de ámbos bordes por los hilos verticales, rejistrando los momentos en un cronógrafo. La ascension recta calculada por la ecuacion:

$$\text{sen } A = \frac{\text{tg } D}{\text{tg } \epsilon} \qquad (408)$$

debe coincidir con el valor del pasaje por el meridiano T, si lo libramos de todos los errores del instrumento. Si no coincide, es:

$$A - T = \triangle u \qquad (420)$$

la correccion del péndulo con que observamos. Si ahora poco ántes o despues de observar el sol observamos una estrella brillante, visible al dia, en el momento t, entónces $t + \triangle u$ nos dará α, la ascension recta de la estrella. Tambien se puede escribir la ecuacion:

$$\alpha - A = t - T \qquad (421)$$

o

$$\alpha = A + (t - T) \qquad (422)$$

donde t, T son valores observados i A uno calculado por la ecuacion (408) (todo depende de si no hai marcha del reloj, o si se la toma en cuenta, como lo espondremos mas tarde).

De la misma manera, como hemos correjido D por el influjo de B, lo debemos hacer tambien con T. Siempre debemos tomar en cuenta el punto de la eclíptica, donde se proyecta el sol visible, que por las atracciones de los otros planetas se alejó un poco de este plano fundamental. La diferenciacion del triángulo respectivo nos da (véase la clase del año 1909):

$$d\,T = \frac{B}{15} \cdot \frac{\cos A}{\cos D} \cdot \operatorname{sen} \epsilon \qquad (423)$$

si lo espresamos en segundos de tiempo.

Tales observaciones para determinar las ascensiones rectas de las principales estrellas, fundándonos en la ascension recta del sol, no son de igual valor en cualquier época. De nuestra ecuacion diferencial (410) derivamos:

$$d\,A = \frac{2 \operatorname{tg} A}{\operatorname{sen} 2\,D}\,dD - \frac{2 \operatorname{tg} A}{\operatorname{sen} 2\,\epsilon}\,d\epsilon \qquad (424)$$

Vemos, pues, que la influencia de errores en D i en ϵ es un mínimo si $\operatorname{tg} A = 0$, es decir, si $A = 0^h$ o 12^h, o en palabras, si observamos en los momentos (o lo mas cerca posible a ellos) del equinoccio de primavera u otoño.

Para $\operatorname{tg} A = 0$, desaparece cada influencia de un error en ϵ, miéntras el factor de $d\,D$ asume la espresion de $\frac{0}{0}$.

Averiguemos algo mas el factor de $d\,D$, o sea $\frac{2 \operatorname{tg} A}{\operatorname{sen} 2\,D}$:

$$\frac{2 \operatorname{tg} A}{\operatorname{sen} 2\,D} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{sen} D \cdot \cos D} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} D}\,(1 + \operatorname{tg}^2 D) \qquad (425)$$

Introduciendo el valor de:

$$\operatorname{tg} D = \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{tg} \epsilon \qquad (408)$$

obtenemos:

$$\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{sin} A \operatorname{tg} \epsilon}\,(1 + \operatorname{sen}^2 A \operatorname{tg}^2 \epsilon) = \frac{1 + \operatorname{sen}^2 A \cdot \operatorname{tg}^2 \epsilon}{\cos A \cdot \operatorname{tg} \epsilon} \qquad (426)$$

La condicion de que esta fraccion obtenga su valor mínimo averiguamos para $\frac{1 + \operatorname{sen}^2 A \operatorname{tg}^2 \epsilon}{\cos A}$, suprimiendo en el numerador el valor constante de $\operatorname{tg} \epsilon$. La diferenciacion segun A, nos dá:

$$\frac{2.\cos^2 A \operatorname{sen} A \operatorname{tg}^2 \epsilon + \operatorname{sen} A (1 + \operatorname{sen}^2 A \operatorname{tg}^2 \epsilon)}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} A (1 + \operatorname{tg}^2 \epsilon [1 + \cos^2 A])}{\cos^2 A} \qquad (427)$$

Esta espresion se hace 0, únicamente cuando sen $A = 0$, porque la paréntesis, compuesta únicamente por valores positivos, no se hace 0 por ningun valor real de A.

Poniendo sen $A = 0$, cos $A = 1$ en la espresion:

$$\frac{1 + \operatorname{sen}^2 A \operatorname{tg}^2 \epsilon}{\cos A . \operatorname{tg} \epsilon},$$

ella se invierte en cotg ϵ. No hai duda que esto sea el mínimo de $\frac{2 \operatorname{tg} A}{\operatorname{sen} 2 D}$ porque el máximo es ∞ para $A = 6^h$ o 18^h.

El valor numérico del mínimo es cotg $\epsilon = 2.305$, vemos, pues, con qué gran factor se multiplica un error en las declinaciones en cuanto a su influjo en la ascension recta. Observando mal la declinacion del sol de 0."5, ya resulta un error de 1."15 $= 0.^s08$ en la ascension recta de él i de todas las estrellas observadas juntas.

Debemos disminuir, pues, los errores accidentales de observacion en D, repitiendo las observaciones en varios dias ántes i despues del equinoccio. Pero para eliminar los errores sistemáticos, que pueden provenir de errores sistemáticos de division del círculo, de un valor falso de la latitud, error constante de la refraccion, etc., hai otro camino. Volvamos a la ecuacion (424):

$$dA = \frac{2 \operatorname{tg} A}{\operatorname{sen} 2 D} dD$$

despreciando el influjo de $d\epsilon$, que efectivamente es cero, entónces veremos, que aun para errores constantes de D, se invierte su influjo en A, si el factor $\frac{2 \operatorname{tg} A}{\operatorname{sen} 2 D}$ cambia su

signo. I esto sucede si observamos, cuando la ascension recta A' del sol sea dada por $A' = 12^h - A$, entónces es:

$$\text{tg } A' = - \text{tg } A$$

pero

$$\text{sen } 2\ D' = + \text{sen } 2\ D$$

i

$$\frac{2 \text{ tg } A'}{\text{sen } 2\ D'}\ dD' = - \frac{2 \text{ tg } A}{\text{sen } 2\ D}\ dD. \qquad (428)$$

Observamos, pues, la primera vez algunos dias despues del equinoccio de primavera i la segunda vez tantos dias ántes del equinoccio otoñal. O tambien combinamos observaciones ántes del punto aries con otros tantos dias despues del punto de la balanza. Las declinaciones serán casi iguales en las observaciones combinadas, pues, es mui probable que tambien sea idéntico el error de D, que así se elimina perfectamente o casi perfectamente combinando las observaciones.

§ 66. *Influjo de la marcha del reloj.*—Lo que dijimos ántes, que es necesario observar estrellas juntas con el sol que culminan poco ántes o despues, vale solo para los tiempos antiguos o para observatorios que no disponen de un buen reloj.

La marcha irregular del reloj es ahora el enemigo invencible de la determinacion de las ascensiones rectas de las estrellas, si no logramos eliminarla.

Se determina la marcha diaria del reloj independiente de cualquiera posicion supuesta de una estrella observando la misma estrella en dos culminaciones consecutivas.

Si tomamos de una efeméride el cambio pequeño que ha sufrido la posicion de la estrella durante este dia sideral i lo restamos del tiempo del pasaje del segundo dia nos dan los dos pasajes t_2 i t_1 por su diferencia $t_1 - t_2$ a *m la marcha del reloj*. Deben ser iguales i su diferencia cero, si tenemos un reloj sideral perfecto. Con varias estrellas se obtiene un promedio mas libre de los errores de observacion. La marcha es positiva, si la estrella pasa por el meridiano en el segundo dia en un momento t_2 mas temprano. Entónces los valores de la correccion del péndulo:

$$\left.\begin{aligned} \triangle u_1 &= \alpha - t_1 \\ \triangle u_2 &= \alpha - t_2 \end{aligned}\right\} \qquad (429)$$

se distinguen por una diferencia positiva:

$$m = \triangle u_2 - \triangle u_1 = t_1 - t_2 \qquad (430)$$

Si pudiésemos considerar a m uniforme durante todo el dia, cada diferencia d de hora indicada por el reloj debe ser correjida por $+ d \frac{m^s}{86400}$, para invertirla en tiempo sideral perfecto.

Un ejemplo lo ilustrará. Se haya observado:

el 1.º de Julio de 1911 el sol a las	6^h	37^m	$58.^s47$
la estrella Sirio a las	6	41	13. 10
el 2 de Julio de 1911 se observa la misma estrella a las	6	41	13. 51

La efeméride (calendario astronómico para la parte austral de la América del Sur. Año 1911, páj. 71), nos indica que la ascension recta de Sirio cambia entre 1 i 2 de Julio en $+0^s01$. En la misma posicion del dia anterior habria pues pasado Sirio a las $6^h\ 41^m\ 13.^s50$ i la marcha del reloj es, pues, $6^h\ 41^m\ 13.^s10 - 6^h\ 41^m\ 13.^s50 = -0.^s40$. Esta marcha en 24 horas no influye en los $3^m\ 14.^s63$, tiempo que culmina Sirio mas tarde que el sol, i aplicamos, pues, esta diferencia de $3^m\ 14.^s63$ sin correccion.

Si el cálculo nos hubiera dado ascension recta del sol al pasaje del 1.º de Julio $= 6^h\ 37^m\ 58.^s26$, indicaria esto un $\triangle u$ de $-0.^s21$ para el sol, i aplicando lo mismo a Sirio obtenemos su ascension recta para el 1.º de Julio igual a $6^h\ 41^m\ 12.^s89$.

Otra cosa sucede si observamos el mismo dia ántes que al sol la estrella α Orionis a las $5^h\ 50^m\ 21.^s01$. Al intervalo que la separa del sol o sea a $-47^m\ 37^s$ corresponden

$-\frac{47.^{m}6}{1440}$ de la marcha diaria $= -\frac{1}{30}$ de $-0.^{s}40$ o sea $+0.^{s}01$, de manera que al culminar α Orionis es la correccion del péndulo solo $-0.^{s}20$ i para la ascension recta absoluta de esta estrella obtenemos $5^{h}\ 5^{m}\ 20.^{s}81$.

La cuestion principal es poder suponer uniforme la marcha del reloj durante las 24 horas del dia. En vista del cambio de temperatura de dia a noche i vice-versa que afecta el largo del péndulo, es mui improbable esta suposicion en vista que un largo péndulo va mas despacio que un corto. Se compuso por esto la varilla del péndulo por varios metales cuyo diferente coeficiente de dilatation garantizaba como invariable la distancia del punto de gravedad del péndulo del de suspension; o se construyó el peso de péndulo por un vaso llenado de mercurio, que subiria tanto mas por el calor cuanto mas bajaria el vaso por la estension del péndulo. Al fin Riefler construyó relojes con varillas del péndulo escavadas i llenas de mercurio con la misma intencion i con mas éxito, porque la varilla larga i delgada del mercurio en el péndulo se asimila mas lijero a la temperatura esterior que la masa grande en el vaso.

Si ademas incluimos el reloj herméticamente en un tubo cilíndrico, de que se sacó el aire por una bomba i si ademas lo colocamos en un subterráneo i hacemos lo posible que sea constante la temperatura, podemos suponer que tal reloj sea libre de cambios de la presion barométrica (marcha con pocos milímetros de presion) i de la temperatura. No hai razon, pues, de suponer que la marcha de tal reloj no sea uniforme.

Observamos, pues, no pocas estrellas con el sol, sino todas que podemos alcanzar o mejor dicho una red completa igualmente distribuida por las 24 horas. Sacamos así un gran número de valores de la marcha diaria i la aplicamos suponiéndola uniforme, para correjir las diferencias observadas entre el sol i la estrella respectiva. La diferencia entre dos estrellas vecinas en ascension recta es lo que obtenemos por estas observaciones contínuas independientemente.

Si lo hacemos durante un año, veremos tambien, si todavía existe marcha periódica en el reloj de observacion, que hace obrar el cronógrafo. Pasando las culminaciones de la pareja de estrellas paulatinamente del mediodia, a la mañana, a la madrugada, a la media noche, a la noche, al anochecer, a la tarde i otra vez al mediodia, se efectúan a temperaturas variables i si existiese aun influjo de éstas al reloj tendríamos durante el año una curva bien espresada en los valores de la diferencia de ascension recta de esta pareja i el promedio jeneral quedaria libre de esta onda de calor.

Conociendo las diferencias de las ascensiones rectas de estrellas vecinas, conocemos las ascensiones rectas mismas si hai entre ellas algunas que se observaron junto con el sol cerca de sus equinoccios.

Si conocemos las coordenadas de una série de 40 — 100 estrellas principales, la determinacion de todas las demas por los métodos relativos espuestos en el § $V\frac{1}{2}$ es sencilla.

§ 67. *Ecuacion de brillo.*—Solo hai que hacer lo posible para evitar errores personales causados por las magnitudes de las estrellas. Es sabido que el ojo apercibe el pasaje de una estrella débil por un hilo del instrumento mas tarde, que si la estrella es brillante. Un medio para eliminar este error es aplicar un retículo de alambres estrechos (o varios de variada densidad) delante del objetivo, que por una manija cerca del ocular se puede colocar o retirar. Asi se reduce la magnitud de la estrella brillante conocida, a la de la débil que hai que determinar i se evita que se forme el error.

El efecto de la debilitacion del retículo en cuanto a la observacion de ascensiones rectas se determina observando una estrella brillante por todos los hilos, la mitad con red, la otra mitad sin red. Reduciendo ámbos grupos al hilo medio se obtiene la diferencia causada por la reduccion de la luz de la estrella.

El antiguo círculo meridiano de Eichens ha recibido en 1911 por el mecánico del observatorio, don Ricardo Wüst, un aparato que lleva cuatro anillos del mismo diámetro que el objetivo, que por una jiracion de 90° de la palanca que

los lleva pueden ser colocados uno despues del otro delante del objetivo. Un anillo es vacio i se encuentra regularmente delante del objetivo, permitiendo así libre acceso a los rayos estelares. Los otros tres llevan retículos cada vez mas densos que denominaremos red I, red II, red III.

El atraso que causan estas redes determinó el astrónomo ayudante don Alberto Soza, como sigue:

Red N.º	I	0.ˢ008
»	» II	0. 081
»	» III	0. 159

Del micrómetro impersonal que tambien evita la ecuacion personal de magnitud (a lo ménos en gran parte) hablaremos mas bajo.

III. Instrumento de pasajes acodillado

§ 68. *Determinacion de la hora por el instrumento acodillado.*—Este es un instrumento de pasos pero cuyo eje óptico sufre un cambio de 90° por medio de un prisma cuyo hypotenusa hace ángulos de 45° con la direccion al objetivo i al ocular.

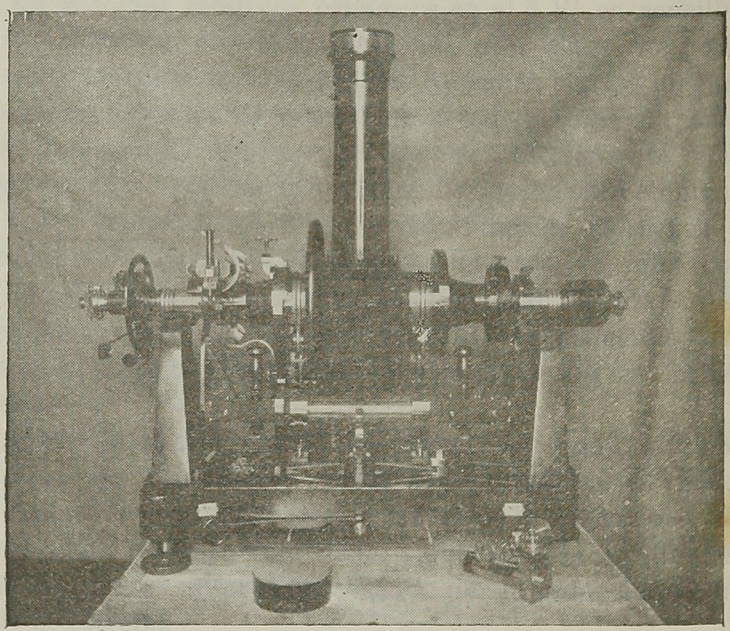

Figura 44.

La luz que penetra por el objetivo va a reflejarse en el prisma i entónces se dirije al tubo que soporta al muñon

agujereado, dejando pasar la luz hasta el ocular. (Véanse figuras 44 i 45). El otro brazo del instrumento sirve de muñon i deja pasar en su interior un sistema de iluminacion.

El prisma interior tiene dos de sus caras formando un ángulo de 90°; o mejor dicho, la seccion perpendicular a la esquina rectangular es un triángulo rectángulo i sósceles. Esta condicion es esencial en el prisma a fin de que los



Figura 45.

rayos reflejados sean perpendiculares a los incidentes i no sufran refraccion en el prisma. Varios tornillos fijan el prisma en el cubo central i sirven asimismo para arreglar su posicion en el caso de que se haya movido, lo cual hará variar la colimacion.

La hora puede determinarse con este instrumento aplicando la misma fórmula que para el anteojo meridiano:

$$a = T + (C_p + m) + n \operatorname{tg} \delta + (c - \kappa) \sec \delta \qquad (18)$$

Pero el instrumento ofrece ventajas especiales, si usamos regularmente su aparato de inversion.

Hai una palanca que levanta todo el anteojo i permite así invertirlo de manera que el ocular i el estremo opuesto del eje horizontal que lleva la lámpara cambian su posicion. La inversion se hace tan lijero, que ella puede efectuarse durante la observacion, tambien de una estrella ecuatorial, de manera que con círculo Este se obtienen pasajes por los primeros hilos, entónces se invierte ántes de llegar la estrella al hilo medio i con círculo Oeste se observa la estrella pasar por los mismos hilos. Este procedimiento tiene la ventaja de eliminar el error de colimacion i hacer desaparecer así tambien la reduccion al hilo medio, porque se han hecho las señales con los mismos hilos en las dos posiciones Este i Oeste del anteojo, que son simétricas a la situacion del eje óptico.

Basta, pues, tomar el promedio de los dos pasajes por hilos idénticos, i tomar despues el promedio jeneral, para tener el pasaje por el meridiano del instrumento.

En efecto, sea u_1 el tiempo en que la estrella pasa por el 1.er hilo del 1.er grupo; f_1 sea la distancia al hilo medio.

La reduccion a la línea de colimacion es:

$$u_1 + (c + f_1) \sec \delta$$

I en la otra posicion del anteojo la reduccion del mismo hilo que se observó al tiempo u'_1, es:

$$u'_1 - (c + f_1) \sec \delta$$

El promedio es $\frac{u_1 + u'_1}{2}$ i da el pasaje por la línea de colimacion.

Lo mismo vale para el hilo 2, el hilo 3, etc.

En cuanto al error de colimacion vemos que en círculo Este dicho error será $+ c$ i en círculo Oeste valdrá $- c$; de

modo que por la inversion su influjo se elimina i obtenemos luego el pasaje por la línea de colimacion. Pero por esto debemos adoptar otro temperamento en cuanto a la aberracion diurna que estamos acostumbrados de restar del valor de *c*. Ella tiene en ámbas posiciones del instrumento el mismo signo i es conveniente, al aplicar la fórmula ya vista, que α esté correjido por la aberracion diurna.

$$\alpha + \kappa \sec \delta = T + (C_p + m) + n \operatorname{tg} \delta \qquad (431)$$

La constante de la aberracion diurna es para un observatorio de la latitud ϕ:

$$\kappa = 0.^{s}021 \cos \phi \qquad (432)$$

siendo, pues, $\kappa . \sec \delta$ para un observatorio una constante, que se calcula una vez por todas para cada estrella.

La fórmula (431) será la que aplicaremos. n obtenemos observando una estrella polar i una mas ecuatorial, eliminando $(C_p + m)$ de la diferencia de ámbas ecuaciones, que despues nos facilitarán dos valores $(C_p + m)$ que deben concordar. Despues calculamos m, que depende de n i b por la fórmula (17). El valor de b se consigue fácilmente por el nivel.

Hai que tomar en cuenta la posible desigualdad de los muñones.

Con ocular Este obtenemos la nivelacion b_e i con ocular Oeste b_o.

La cuarta parte de la diferencia, $\frac{b_e - b_o}{4}$, se resta de b_e i se suma a b_o para obtener la inclinacion verdadera del eje que debemos introducir si observamos solo en una posicion.

Pero si invertimos a cada estrella hai que calcular con $\frac{b_e + b_o}{2}$.

§ 69. *Determinación i corrección de la colimación.*—A pesar de no necesitar la colimacion será bueno determinar su valor de tiempo a tiempo para tenerlo bajo control i disminuirlo si fuera considerable. En el Observatorio de Espejo podremos determinar la colimacion en la manera acostumbrada si observamos una polar en círculo Este i Oeste; así obtenemos dos veces $c \sec \delta$ (fig. 46) despues de hecha

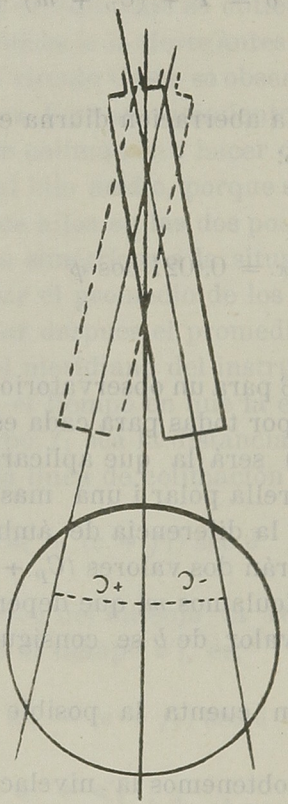

Figura 46.

la reduccion al hilo medio en cada posicion. Tambien se empleará allá un colimador terrestre i para eso servirá el círcu-

lo meridiano Repsold. Observaremos un hilo del Repsold que estará en la posicion indicada por la línea quebrada M_e (fig. 47) i en seguida invertimos el instrumento de pasajes i si encontramos entónces el mismo hilo simétrico (en la posicion M_o) con respecto al hilo medio m, — que comprobaremos midiendo con el hilo móvil del instrumento de pasajes la posision de M_e, m, M_o — el error de colimacion seria nulo; pero si el hilo observado en las dos posiciones no queda simétrico

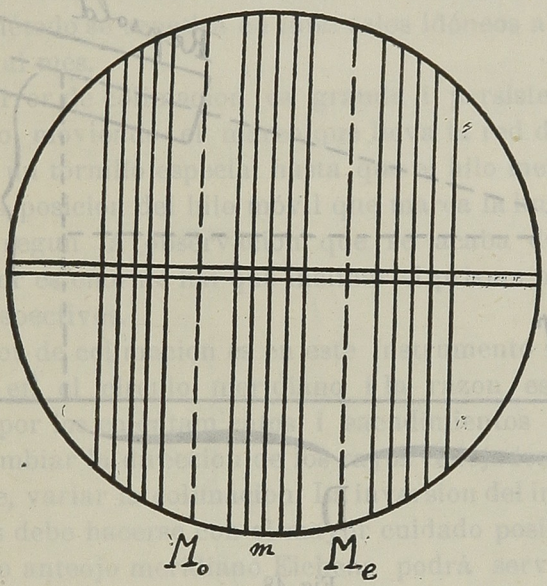

Figura 47.

con respecto al hilo medio del grupo central, se determinará el monto de la colimacion por medio del tornillo micrométrico que es $\left(\frac{M_e + M_o}{2} - m\right)$ multiplicado por el valor de una vuelta. El signo se decide por el sentido del movimiento diario de los astros. Si alcanzan primero al hilo medio m i despues a la posicion indicada por $\frac{M_e + M_o}{2}$ es c positivo, en caso contrario negativo.

El nuevo círculo meridiano Repsold será un excelente colimador del instrumento de pasajes; la distancia de ámbos es mas o ménos 40 mts. i aunque hai diferencia de alturas se podrá hacer la colimacion con toda exactitud. En la fig. 48 tenemos un esquema de los dos instrumentos. Sea D la distancia horizontal del centro de los pilares, a_p la altura del instrumento de pasos construido por Bamberg i a_m la

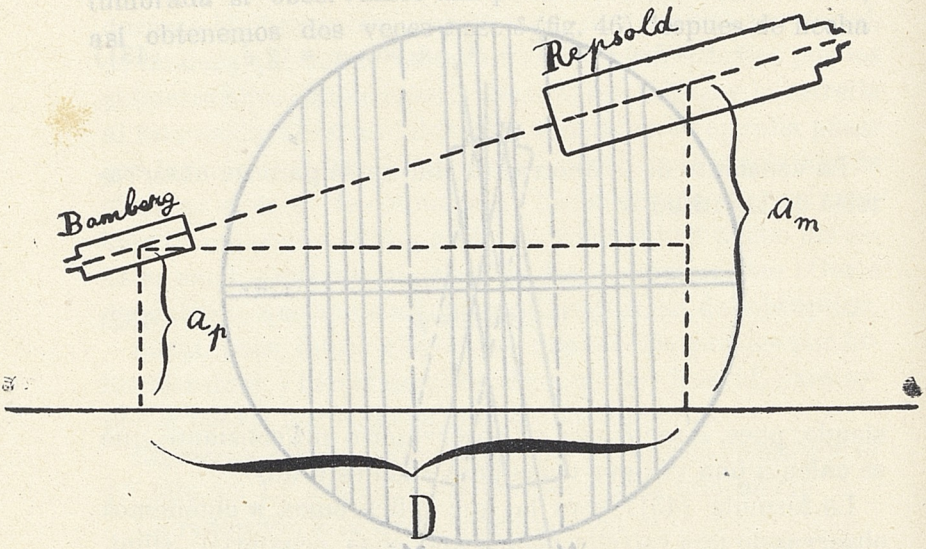

Fig. 48.

altura del círculo meridiano Repsold. La inclinacion i del Repsold estará dada por la fórmula:

$$\text{tg } i = \frac{a_m - a_p}{D} \qquad (433)$$

i a esta altura negativa se pondrá el Repsold, a la misma altura positiva el Bamberg para tener asegurada la direccion de un instrumento perfectamente contra el otro.

Esta operacion se hace durante el dia; sacamos el ocular del anteojo meridiano a fin de que los hilos del retículo se iluminen con la luz del dia i así veremos en el campo del instrumento de pasos los hilos oscuros del Repsold. Observamos con el hilo móvil cualquier hilo del anteojo meridiano i leemos el tambor micrométrico; invertimos el anteojo de pasos i volvemos a colocar el hilo móvil sobre el que sirve de referencia en el Repsold; leemos otra vez i el promedio de ámbas lecturas indicará el punto de colimacion cuya distancia del hilo medio nos dá el error de la colimacion.

Este método se repetirá en intervalos idóneos a lo ménos una vez al mes.

Si el error de colimacion es grande i persiste, se puede correjirlo moviendo el marco que lleva la red de los hilos fijos por un tornillo especial hasta que el hilo medio coincida con la posicion del hilo móvil que marca la línea de colimacion segun la observacion que se acaba de efectuar. Si el error es enorme hai que inclinar el prisma por sus tornillos respectivos.

El error de colimacion es en este instrumento mas variable que en el círculo meridiano i la razon está que el prisma, por los calentamientos i sacudimientos que sufre, hace cambiar la direccion de los rayos reflejados i por consiguiente, variar la colimacion. La inversion del instrumento de pasos debe hacerse con el mayor cuidado posible.

El otro anteojo meridiano Eichens podrá servir tambien como colimador, porque la línea de vista del Bamberg lo alcanza bajo del tubo del meridiano mas cercano Repsold i la idea de colocar los tres instrumentos en el mismo meridiano ha sido con el fin de que se sirvan mútuamente como colimadores.

Debemos procurar que los valores de m i n sean tan pequeños como sea posible; como tambien los valores b i k, las constantes respectivas de la fórmula de Mayer. La posicion del instrumento no será definitiva sino hasta que el pilar se consolide perfectamente, i entónces se podrá hacer la inclinacion b casi igual a cero i el azimut k correjir usando el meridiano Repsold como mira.

§ 70. *Método de Doellen.* – El anteojo de pasajes puede colocarse sobre un trípode (que llegó junto con él), el cual lleva una placa móvil que puede servir para desplazar el instrumento hasta un azimut de 3° a ámbos lados del meridiano. El objeto de esta placa móvil es colocar el instrumento mui cerca al círculo vertical de una estrella polar, i observar junto con ella una o mas estrellas ecuatoriales en el mismo vertical. Sirve a un método especial usado sobre todo cuando urje la observacion, en viaje, si no hai tiempo para esperar el pasaje de la polar por el meridiano.

Se empleará entónces el método llamado de Döllen i elaborado en el observatorio de Pulkowa. Con este método salimos del plano meridiano i observamos una estrella circumpolar, por ejemplo *S* (fig. 49) en un plano vertical que

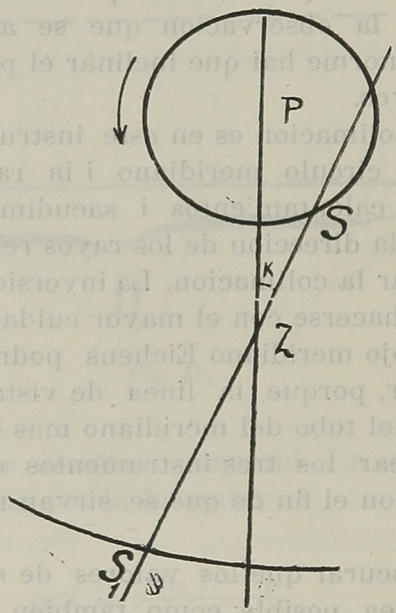

Fig. 49.

formará con el meridiano el ángulo k; en seguida jiramos el anteojo por su eje horizontal a observar una estrella ecua-

torial, pero sin mover la placa. Despues seguimos a la estrella polar moviendo la placa i observamos otra estrella ecuatorial en el nuevo plano vertical que ahora ocupa la polar. Por cada observacion obtenemos C_p.

No espondré por ahora mas que el principio del método de Döllen, que ha tenido grande aplicacion en el hemisferio boreal i un desarrollo especial para la estrella α Ursae minoris visible allá a cualquier momento.

Valdrá un estudio especial, adaptar tal método al hemisferio austral para sus polares, que se ofrecen, sea por su brillo o por su vecindad al polo.

Este trípode no se ha colocado en Espejo, como se dedicará el instrumento primero durante algunos años a las observaciones de la variación de latitud.

§ 71. *Micrómetro impersonal.*—Este instrumento está provisto de dos oculares diferentes, el uno que lleva un retículo comun con tres grupos de cinco hilos fijos i uno móvil i sirve para la observacion directa de pasajes.

El otro ocular tiene un micrómetro que consta de tres hilos móviles, siendo dos de ellos una pareja i el tercero algo distante de los otros; un tornillo micrométrico mueve el marco con los hilos; ademas, hai en ambos oculares otra pareja de hilos perpendiculares a los primeros que se colocan en el sentido del movimiento diurno de las estrellas.

La observacion con el último ocular se hace de manera que la estrella quede entre los hilos horizontales i movemos en seguida el marco hasta que el hilo vertical o la pareja de hilos queden tapando la estrella en todo el trayecto del campo.

Si la estrella es mui luminosa es preferible el hilo solo porque así dimidiaremos la luz, en tanto que con una estrella débil que se oculta tras el hilo, será mejor emplear el par de hilos de modo que la estrella quede al centro de la ranura en todo el recorrido. Al mover el marco se establece a intervalos una corriente eléctrica por medio de una lengua que pasa sobre contactos metálicos separados por largos espacios de interrupcion. Este sistema de conducir la

corriente eléctrica al tambor que mueve el marco con la red de los tres hilos es una inovacion contra la primera instalacion de esta clase, que se debe al profesor Wislicenus, que procuraba al carro del marco mismo con contactos e interrupciones.

La ventaja de este micrómetro es suprimir errores personales, puesto que se sabe que cada observador tiene su costumbre personal de observar estrellas movidas contra una red inmóvil si pasan detras de un hilo, con un atrazo o adelanto contra el momento verdadero que él no puede evitar. Ademas, las estrellas brillantes se observan mas temprano que las débiles, pero tambien en manera diferente por diferentes observadores. Así se ha visto que en estrellas ecuatoriales desde la primera hasta la 9.5 magnitud se comete un error de atrazo que alcanza hasta 0.^{s}2 sec δ, i lo pasa para algunos observadores.

Para disminuir los efectos de la brillantez sobre las observaciones se usan actualmente tambien pantallas de una red finísima, de tal suerte que la luz disminuye hasta dar a todas las estrellas brillantes una magnitud uniforme (véase § 67). Pero así se elimina solo el influjo de la magnitud sobre el error personal, el error mismo queda.

Con el micrómetro del instrumento de pasajes que acabamos de describir se evita completamente el efecto del error personal o a lo ménos gran parte de él. Por esto dicho micrómetro se llama *impersonal*, ya que prescinde de errores que solo dependen de la persona del observador. El buen manejo de este micrómetro es la única condicion para hacer excelentes observaciones i solo una larga práctica producirá observadores idóneos.

Algunos instrumentos modernos están provistos de un aparato de relojeria, cuya marcha varia con la secante de la declinacion a fin de mover los hilos del micrómetro impersonal con la misma velocidad de la estrella, de manera que el observador solo tiene la tarea de regular el movimiento de relojería moviendo el marco un poco adelante o atras, hasta que la estrella observada no salga del centro de la pareja de hilos. Creemos que este método no es adecuado

para tener observaciones concientes absolutamente libres de errores sistemáticos, puesto que puede suceder que una pequeña discordancia del reloj con respecto a la marcha diurna de la estrella observada se note solo despues de haber obrado durante muchos contactos, hasta que suba a un monto que el observador que no tendrá gusto mover el marco con el tornillo de correccion lo encuentre insoportablemente grande.

Se han hecho observaciones con micrómetro impersonal provisto de reloj, i han resultado exactísimas en concordancia interior. Así, Cohn i Postelmann en Königsberg [1]) han alcanzado un error accidental de $0.^s007$ sec δ en exactitud; las observaciones visuales sin micrómetro impersonal jamas alcanzan tales resultados; así, por ejemplo, tres observaciones de la misma estrella en nuestra zona darán:

$27.^s583$
531
664

con que nos contentaríamos, en tanto que en Königsberg se obtendria, por ejemplo, para la misma estrella los tres valores:

$27.^s448$
446
443

Esto dará una idea de la superioridad del micrómetro impersonal (especialmente con reloj).

El nuevo círculo meridiano Repsold llevará tambien micrómetro impersonal, pero sin reloj, a fin de conseguir observaciones lo ménos mecánicas posibles.

§ 72. *Punterias en declinacion.*— En el campo del instrumento de pasajes acodado las estrellas marchan siempre en el sentido de los hilos horizontales i éstos quedan en direccion del tubo del anteojo; con el cambio de distancia zenital

1) Astronomische Nachrichten, Vol. 157, páj. 357 i sig.

varia, por consiguiente, la direccion del movimiento aparente de las estrellas por el campo del instrumento.

Con nuestro instrumento de pasos se determinará tambien declinaciones, o mejor dicho, diferencias de declinaciones, a pesar de no tener él círculos divididos exactamente. Como se lo hace espondremos mas tarde. Aquí solo diremos que el marco que lleva hilo móvil admite una jiracion en su plano de 90°, de manera que este hilo, que ántes estaba paralelo a los hilos (verticales) fijos, por los cuales pasan las estrellas, es despues vertical a ellos i paralelo al movimiento diario. Con estrellas ecuatoriales se debe conseguir

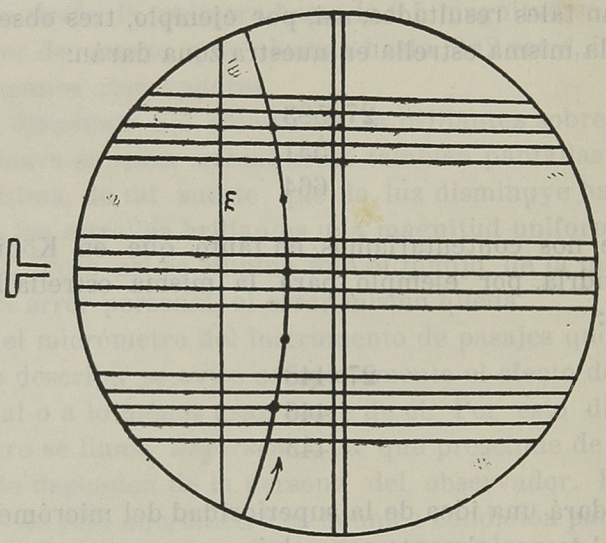

Fig. 50

la paralelidad absoluta de este hilo móvil al movimiento diurno de dichas estrellas í en esta posicion se fijará el marco.

Las estrellas en declinaciones distantes del ecuador describirán despues líneas curvadas por el campo (arcos de sus círculos pequeños).

Para evitar el defecto de una posible desorientacion del hilo móvil m se recomienda entónces hacer varias punterías sobre las estrellas que pasan por el campo i hacerlas en posiciones simétricas al hilo medio; la posicion de los hilos verticales facilita ahora las punterías simétricas al meridiano (fig. 50).

Se hacen siempre punterías impares, tres, cinco o siete, si se quiere hacer una puntería sobre el hilo medio mismo (en la figura se han indicado 5).

Como se observará, como veremos, sistemáticamente las mismas estrellas, se tendrá para cada una de ellas la correccion de curvatura como una constante de la estrella i de cálculo sencillo. Hemos visto que la espresion que da la curvatura del paralelo es $\frac{1}{2}\,\text{sen}^2\,\frac{t}{2}\,\text{sen}\,2\,\delta$ (291).

Pero como observaremos siempre en las mismas distancias del hilo medio, son constantes no los ángulos horarios sino los valores $f = t\,\cos\,\delta$ (mejor dicho $\text{sen}\,f = \text{sen}\,t\,\cos\,\delta$).

Trasformando la fórmula, pues, para f, reemplazando $\text{sen}\,\frac{t}{2}$ por $\text{sen}\,\frac{f}{2}\,\sec\,\delta$, sale:

$$\frac{1}{2}\,\text{sen}^2\,\frac{t}{2}\,\text{sen}\,2\,\delta = \text{sen}^2\,\frac{f}{2}\,\frac{\text{sen}\,\delta\,\cos\,\delta}{\cos^2\,\delta} = \text{sen}^2\,\frac{f}{2}\,.\,\text{tg}\,\delta \qquad (434)$$

donde hai que agregar todavía el divisor sen 1", para espresar la correccion en segundos de arco. En vista, que los valores f son siempre pequeños i que ellos son dados en segundos de tiempo, se convierte la curvatura en:

$$\frac{15^2}{4}\,.\,\frac{\text{sen}^2\,1''}{\text{sen}\,1''}\,.\,f^2\,.\,\text{tg}\,\delta = 56.25\,.\,\text{sen}\,1''\,.\,f^2\,.\,\text{tg}\,\delta \qquad (435)$$

el factor numérico se calcula

log 56.25 =	1.75012
log sen 1"	4.68557 — 10
	6.43569 — 10

Pues la curvatura = $[6.4357 - 10].f^2.\text{tg}\,\delta$

i el signo de la correccion se determina por la mediacion que sin la curvatura se habria obtenido menor la declinacion austral.

Si, p. ej, convenimos de hacer las punterías a valores $f = -30^s, -15^s, 0^s, +15^s, +30^s$, calculamos el promedio del influjo de la curvatura:

$$\begin{aligned}(-30)^2 &= 900\\(-15)^2 &= 225\\0^2 &= 0\\(+15)^2 &= 225\\(+30)^2 &= 900\end{aligned}$$

$$2250 : 5 = 450$$

$$\log 450 = 2.6532$$

$$6.4357 - 10$$

$$9.0889 - 10$$

de manera que la correccion, que luego se aplica al promedio de las cinco punterias es 0."1227. tg δ i queda una constante para cada estrella de nuestro programa que observamos noche por noche.

Como jeneralmente la estrella pasará fuera de los hilos horizontales que corresponden al cero del tornillo, habrá que tomar en cuenta la distancia del hilo móvil a los hilos horizontales, i esto se hará con el micrómetro, previa determinacion de una vuelta del tornillo.

En la fig. 51 se ven el camino de la estrella, el hilo móvil i los hilos horizontales. La distancia d del hilo móvil a los horizontales, cuyo centro serviria como punto de cero, se espresa por las revoluciones micrométricas. Ahora bien, si el círculo del instrumento de pasos quedara fijo en una lectura dada, la declinacion de la estrella se determinaria agregando a tal lectura la distancia micrométrica del hilo móvil a los horizontales; pero una determinacion de esta especie no seria posible, por cuanto el círculo no está dividido para apreciar segundos de arco i ménos aun décimos

de segundo; si esto se pudiera, conseguiríamos singulares declinaciones, como en el círculo meridiano. Por esto el círculo del anteojo de pasajes solo sirve para calar las es-

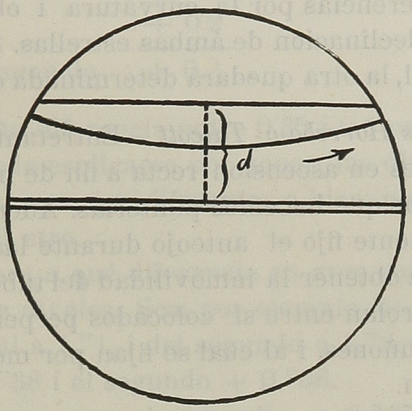

Fig. 51

trellas indicando con su nonio solo el minuto de arco.

El objeto primordial del instrumento de que hablamos es la determinacion de *diferencias* de distancias zenitales de dos estrellas. Esta diferencia, despues de aplicadas todas las

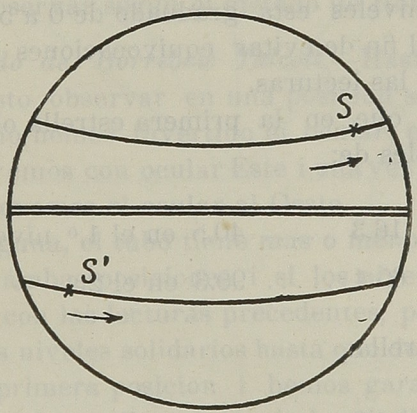

Fig. 52

correcciones, es igual a la diferencia en declinacion. Supongamos que se observa la distancia zenital de una estrella *S* (fig. 52) por el método de cinco o siete punterías, habrá otra

estrella que pase por el mismo campo sin mover el anteojo despues de la estrella *S* i supongamos que tambien se le observan punterías. La diferencia de lecturas para las estrellas *S* i *S'* dará la diferencia de distancias zenitales; correjimos estas diferencias por la curvatura i obtendremos la diferencia en declinacion de ámbas estrellas. Si una de ellas es fundamental, la otra quedará determinada en declinacion.

§ 73. *Niveles Horrebow-Talcott.*—Entretanto no determinaremos pasajes en ascension recta a fin de no perturbar la tranquilidad con que hacemos punterías. Ademas, debe quedar completamente fijo el anteojo durante las dos séries de punterías. Para obtener la inmovilidad del tubo hai dos niveles que se controlan entre sí colocados perpendicularmente al eje de los muñones, i al cual se fijan por medio de un tornillo de presion.

Si el eje, i por consiguiente el tubo, se desplaza entónces, estando apretado el tornillo, la graduacion del nivel acusa en el acto los movimientos.

Leemos los dos niveles para las dos estrellas, i si hai un cambio pequeño, podemos usar todavía la observacion aplicando la correccion para dicho cambio.

Uno de los niveles está graduado de 0 a 50 i el otro de 50 a 100, con el fin de evitar equivocaciones a que de ámbos pertenecen las lecturas.

Supongamos que en la primera estrella obtuvimos una lectura de niveles de:

16.3 ..... 40.5 en el 1.º nivel

i de: 65.4 ..... 90.3 en el 2.º »

i para la 2.ª estrella:

16.7 ..... 40.8 en el 1.º nivel

65.8 ..... 90.5 en el 2.º »

Notamos que ha habido un pequeño movimiento; un es-

tremo de la burbuja ha aumentado por 0.4 i el otro por 0.3 en el primer nivel, o en su promedio por + 0.35.

En el 2.º nivel los cambios son:

$$\begin{array}{rr} & +\ 0.4 \\ & +\ 0.2 \\ \hline \text{en promedio} & +\ 0.3 \end{array}$$

Esta pequeña diferencia entre 0.35 i 0.3 es casi despreciable, i bien puede esplicarse por tener las divisiones de ámbos niveles valores algo diferentes o bien que uno sea mas sensible que el otro.

Veamos ahora a qué diferencia en arco corresponde la de las lecturas de niveles. Sea, por ejemplo, una parte del primer nivel igual a 1."1, i del segundo a 1."2, entónces el primero da + 0."38 i el segundo + 0."36.

Se calcula, pues, con el promedio + 0."37, i se agrega o se resta del valor observado de la diferencia de las distancias zenitales, segun el eje durante la segunda observacion fué mas inclinada en la direccion a la primera, o en sentido contrario.

Esta disposicion de dos niveles pone en aptitud el instrumento para observar segun el método de Horrebow-Talcott.

§ 74. *Método de Horrebow-Talcott.*—Hasta el presente hemos supuesto observar en una posicion solo del tubo, o mejor dicho, no hemos invertido el ocular; pero para dicho método observemos con ocular Este i una vez fijo el tubo con los niveles, llevemos el ocular al Oeste.

Sin duda alguna, el tubo tiene mas o ménos igual distancia zenital en ámbas posiciones, i si los niveles manifiestan discordancias con las lecturas precedentes, podemos mover el tubo con sus niveles solidarios hasta que den cerca las lecturas de la primera posicion i hemos garantizado que el punto de cero del tornillo micrométrico indique la misma distancia zenital que ántes, únicamente esta vez al otro lado del zenit, si tomamos en cuenta i correjimos por la pequeña diferencia de los niveles.

Si movemos con el tornillo tanjencial del instrumento los niveles hasta que entren mas o ménos en la lectura que hubo ántes de la inversion, el último movimiento ántes de que descansen debe hacerse siempre en un sentido idéntico convenido, p. ej., marchando a números mayores. Esto se hace con el fin de evitar el punto muerto del nivel, debido a adherencias o asperezas interiores; siempre es conveniente hacer marchar la burbuja en el mismo sentido, ántes de llegar a descanso.

Si despues de hacer la inversion se encuentre otra estre

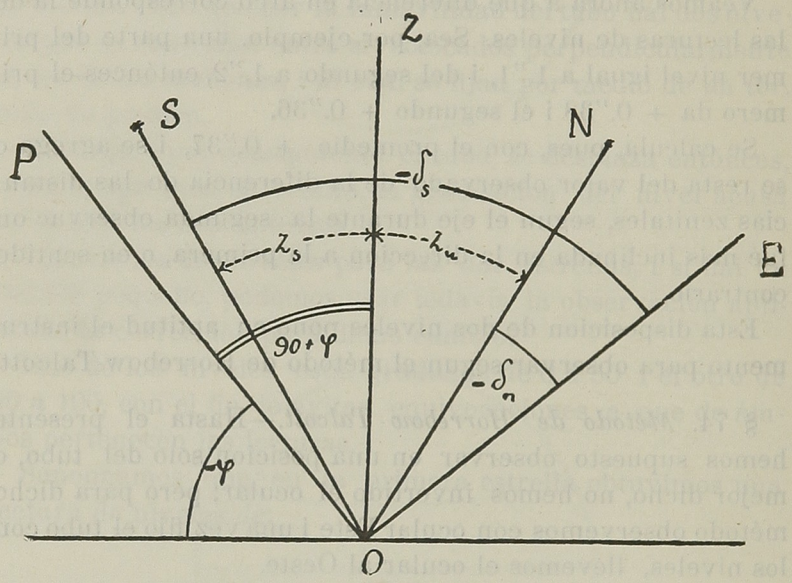

Fig. 53

lla que pase exactamente entre los hilos horizontales, es decir, por el cero del tornillo, donde tambien marchaba la primera ántes de la inversion, tendremos evidentemente que ámbas estrellas tienen la misma distancia zenital; puesto que hayamos aplicado debidamente a ámbas estrellas las correcciones de curvatura e inclinacion.

Sean S i N las posiciones de las estrellas ántes i despues de la inversion (fig. 53) OZ la direccion al zenit, OP el eje del mundo i OE el plano del ecuador. Tenemos que el ángulo EOZ es igual a la altura del polo, o sea, para el polo Sur:

$$EOZ = -\phi$$

I el ángulo:

$$NOE = -\delta_n$$

Entónces se ve claramente del dibujo que:

$$EOZ = NOE + NOZ$$

o bien:

$$\left.\begin{aligned} -\phi &= -\delta_n + z_n, \\ \text{o}\quad \phi &= \delta_n - z_n \end{aligned}\right\} \qquad (436)$$

Para la otra estrella resulta:

$$EOZ = EOS - ZOS$$

esto es:

o

$$\left.\begin{aligned} -\phi &= -\delta_s - z_s \\ \phi &= \delta_s + z_s \end{aligned}\right\} \qquad (437)$$

Las ecuaciones (436) i (437) que hemos encontrado son de suma importancia para encontrar la latitud jeográfica ϕ. Sumemos (436) i (437). Resulta:

$$2\,\phi = \delta_n + \delta_s + (z_s - z_n) \qquad (438)$$

Con la ecuacion (438) vemos que si la diferencia de dis-

tancias zenitales es cero, la latitud ϕ tendrá por espresion:

$$\phi = \frac{\delta_n + \delta_s}{2}. \qquad (439)$$

Las observaciones pueden prepararse de antemano buscando en los catálogos de estrellas aquellas que tienen entre sí una distancia zenital mui poco diferente i que pasan una pocos minutos despues de la otra por el meridiano. En seguida las reduciríamos al lugar aparente para el momento de la observacion.

Como es de suponer, pocas parejas tendrán distancias zenitales completamente iguales i el método para determinar ϕ adoleceria de parejas idóneas durante largos períodos del año; de ahí proviene que solo se pueden emplear parejas que tienen una pequeña diferencia en distancia zenital i calculamos con la fórmula:

$$\phi = \frac{\delta_n + \delta_s}{2} + \frac{z_s - z_n}{2} \qquad (440)$$

$z_s - z_n$ debe ser tal que ámbas estrellas quepan dentro del campo.

Con la primera estrella se obtiene en el tornillo del micrómetro una lectura R_n i con la segunda R_s, que agregados con su signo respectivo a la distancia zenital (desconocida) del punto cero z_0, darán:

$$\left.\begin{aligned} z_n &= z_0 + R_n \\ z_s &= z_0 + R_s \end{aligned}\right\} \qquad (441)$$

de manera que restando ámbas ecuaciones desaparece z_0 i $R_n - R_s$ es la diferencia de las distancias zenitales obtenidas en vueltas del tornillo.

Es, por lo tanto, indispensable conocer el valor de una

revolucion del tornillo con la mas grande exactitud posible.

Finalmente, tenemos la fórmula sencilla:

$$\phi = \frac{\delta_n + \delta_s}{2} + \frac{z_s - z_n}{2} = \frac{\delta_n + \delta_s}{2} + \frac{R_s - R_n}{2} \qquad (442)$$

Este es el *método de Horrebow-Talcott*, que presenta la gran facilidad de determinar la altura del polo sin leer círculos i por esto es independiente de todos los errores espuestos en los §§ 35-41, flexion, errores de division, escentricidad, etc.

§ 75. *Observacion de Grupos.*—Es ventajoso repetir las observaciones i no tomar una pareja sino un grupo de parejas, i esto constituye lo principal del método, porque podemos elejir las parejas de estrellas de tal suerte que el promedio de las diferencias $\frac{R_s - R_n}{2}$ para cada pareja sea casi cero para el grupo.

Así, por ejemplo, hemos elejido para Espejo como segundo grupo de los ocho distribuidos igualmente por las 24 horas las siguientes nueve parejas:

N.° en el grupo	N.°	N.° de Gould	Magn.	α 1912.0	δ 1912.0	Precesion	$\frac{\delta_n + \delta_s}{2}$	$\frac{\delta_n + \delta_s}{2} - \phi$
1 *a*	19	2108	6.7	$2^h\ 2^m\ 41.^s8$	$-19^o\ 33'\ 23.''9$	+ 17.''247	$-33^o 34'\ 8.''6$	$-0'\ 16.''1$
b	20	2233	7.2	2 8 32. 8	— 47 34 53. 3	+ 16. 979		
2 *a*	21	2433	5.4	2 18 30. 4	— 24 12 57. 4	+ 16. 440	−33 30 58. 3	+ 2 54. 1
b	22	2580	$7^3/_4$	2 24 48. 6	— 42 18 59. 3	+ 16. 180		
3 *a*	23	2752	5.7	2 32 21. 0	— 30 25 41. 7	+ 15. 779	−33 33 13. 1	+ 0 39. 4
b	24	2921	6.8	2 40 38. 8	— 36 40 44. 5	+ 15. 324		
4 *a*	25	3022	5.6	2 46 5. 3	— 28 18 25. 0	+ 15. 013	−33 33 6. 8	+ 0 45. 7
b	26	3103	6.0	2 50 7. 3	— 38 47 48. 6	+ 14. 776		
5 *a*	27	3232	6.8	2 55 27. 0	— 34 32 22. 1	+ 14. 458	−33 36 52. 2	− 2 59. 7
b	28	3376	$7^3/_4$	3 3 36. 5	— 32 41 22. 4	+ 13. 954		

N.º en el grupo	N.º	N.º de Gould	Magn	α 1912.0	δ 1912.0	Precesion	$\frac{\delta_n + \delta_s}{2}$	$\frac{\delta_n + \delta_s}{2} - \phi$
6 *a*	29	3550	6.7	3h 12m 8.s1	— 45º 59' 41."8	+ 13."408	−33º 42' 6."4	— 8' 13."9
b	30	3654	6.9	3 18 21. 2	— 21 24 31. 0	+ 12. 998		
7 *a*	31	3778	5.6	3 24 8. 6	— 35 59 13. 3	+ 12. 610	−33 27 17. 2	+ 6 35. 3
b	32	3910	7.1	3 30 19. 6	— 30 55 21 1	+ 12. 185		
8 *a*	33	4044	7.1	3 36 15. 5	— 28 47 30. 9	+ 11. 768	−33 40 48. 3	— 6 55. 8
b	34	4145	7.2	3 40 53. 6	— 38 34 5. 8	+ 11. 437		
9 *a*	35	4383	6.9	3 51 52. 9	— 46 40 27. 8	+ 10. 595	−33 31 48. 3	+ 2 4. 2
b	36	4514	6.0	3 59 32. 0	— 20 23 8. 8	+ 10. 062		
Estrella de reserva								
7 *b'*	32'	3913	6.4	3 30 23. 7	— 31 22 37. 5	+ 12. 180	−33 40 55. 4	— 7 2. 9

Miéntras la primera columna numera las parejas juntas, la segunda columna dá el número corriente de las estrellas, la tercera el número del catálogo de Gould, de donde se tomaron las estrellas. La cuarta dá la magnitud, la quinta la ascension recta para 1912, la sesta la declinacion, la sétima la precesion en declinacion, la octava el promedio de las declinaciones de cada pareja i la última la diferencia de este promedio contra la altura del polo adoptada que es — 33° 33' 52".5.

Se ve que la distancia $z_n - z_0$ o $z_s - z_0$ que se mide con el tornillo micrométrico es por máximo 8' 13".9, ella debe ser $< 10'$ porque el campo de vista tiene un radio de mas o ménos 15' i no es bueno medir demasiado cerca al borde. La suma de las desviaciones $\frac{\delta_n + \delta_s}{2} - \phi$ es = — 5' 25."8 i si dividimos por 9 resulta el promedio — 36."20.

Supuesto que una vuelta del tornillo sea 1', en el promedio de las observaciones de este grupo, influye solo 0.6 de este valor i un error cometido en la determinacion de él afecta tambien el resultado solo con 0.6, pero en una manera sistemática.

Las estrellas de este grupo están sujetadas a la precesion i el valor promedio de las 18 precesiones resulta a + 13."956.

Por este valor positivo cambia año por año el promedio de $\frac{\delta_n + \delta_s}{2} - \phi$ i los valores respectivos serán:

	Suma	Promedio
para 1913.0	— 3' 20."2	— 22."24
1914.0	— 1 14. 5	— 8. 28
1915.0	+ 0 51. 1	+ 5. 68
1916.0	+ 2 56. 7	+ 19. 63
1917.0	+ 5 2. 3	+ 33. 59
1918.0	+ 7 7. 9	+ 47. 54

Vemos, pues, como se hace mas i mas favorable por la precesion la observacion de este grupo en los años siguien-

tes. Mas o ménos en Julio de 1914 sale el promedio cero, es decir, el valor de una vuelta del tornillo sea tan incierto como quiere, su error no influiria de nada en el resultado de la altura del polo que dá este grupo.

Pasado este momento llegamos a valores positivos de

$\frac{\delta_n + \delta_s}{2} - \phi$, que, al principio pequeños, crecen poco a poco

hasta que suban a valores inadmisibles por ser múltiples mayores de una vuelta.

Tambien se hace mas i más difícil la observacion de la pareja 7, porque la distancia de sus estrellas del punto cero en el campo sube de + 10'.

Pero hai un remedio si cambiamos la estrella N° 7 *b* contra la estrella de reserva 7 *b'* (véase al fin del cuadro), cambio que debemos hacer mas o ménos en 1918, entónces se reduce la desviacion particular de esta pareja de +7' 49."7 a −5' 48."5 i el promedio del grupo de + 47."54 a − 43."37, de manera que el grupo cambiado en esta forma puede servir por lo ménos seis años mas.

Así hai que estudiar detenidamente que la desviacion promedia de los valores $\frac{\delta_n + \delta_s}{2}$ del valor de ϕ siempre

quede insignificante a fin de que el valor de una vuelta no influya demasiado a los resultados.

§ 76. *Variacion de la latitud.* — En el año 1885 descubrió el astrónomo norte-americano Chandler en Boston, que la latitud de un lugar es variable, i pocos años despues, en 1887, Federico Küstner, entónces en Berlin, ahora en Bonn, corroboró tal descubrimiento por observaciones independientes, ántes que haya salido a luz el resultado de Chandler.

Chandler en Boston i Küstner en Berlin, encontraron que la variacion de la latitud podia representarse por la curva

de la fig. 54 i dedujeron para el período de la variacion un tiempo de 14 meses. En la figura las abscisas representan el tiempo i las ordenadas la latitud; el eje de las abscisas indica el valor normal de la altura del polo, el máximo alcanzó a + 0."3 i el mínimo a — 0."3; de consiguiente, el cambio de la altura polar fluctuaba en 0."6.

Este descubrimiento hecho por dos astrónomos independientes no dejó lugar a dudas sobre el cambio de las latitudes, si no se pudiera creer en un influjo de refracciones anó-

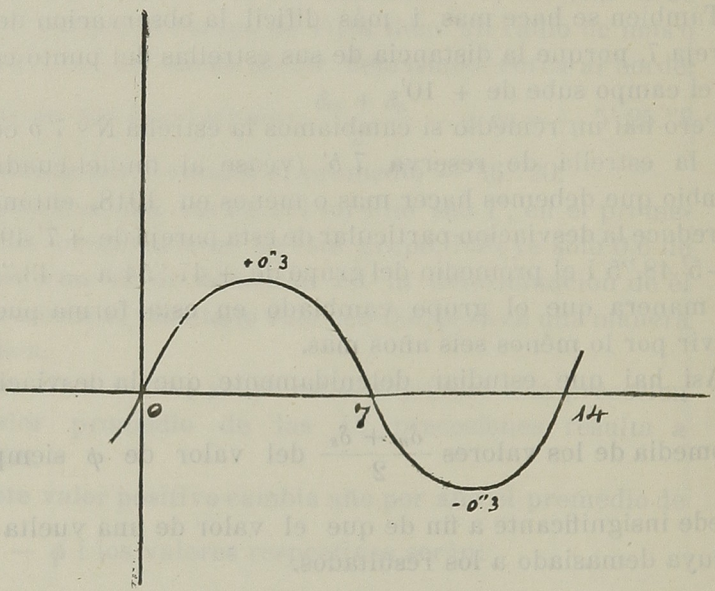

Fig. 54

malas variables en el período de mas a ménos un año; pero esta idea fué desechada cuando en varios observatorios, Berlin, Potsdam, Prag se empezaron observaciones contínuas por el método de Horrebow-Talcott a la determinacion de latitudes. Con este método se elimina todo influjo de refraccion sobre las observaciones hasta un pequeño resto de refraccion diferencial que no daba lugar a creer a errores periódicos de tal tamaño. Pues bien, las determinaciones de

latitud con el método Horrebow-Talcott confirmaron plenamente los resultados de Chandler i Küstner.

Entónces no quedaba otro camino que atribuir al polo mismo un desplazamiento de su posicion media; o en otras palabras, que el eje de la tierra varia de su posicion media. Para asegurar esta última hipótesis tan asombrante se envió

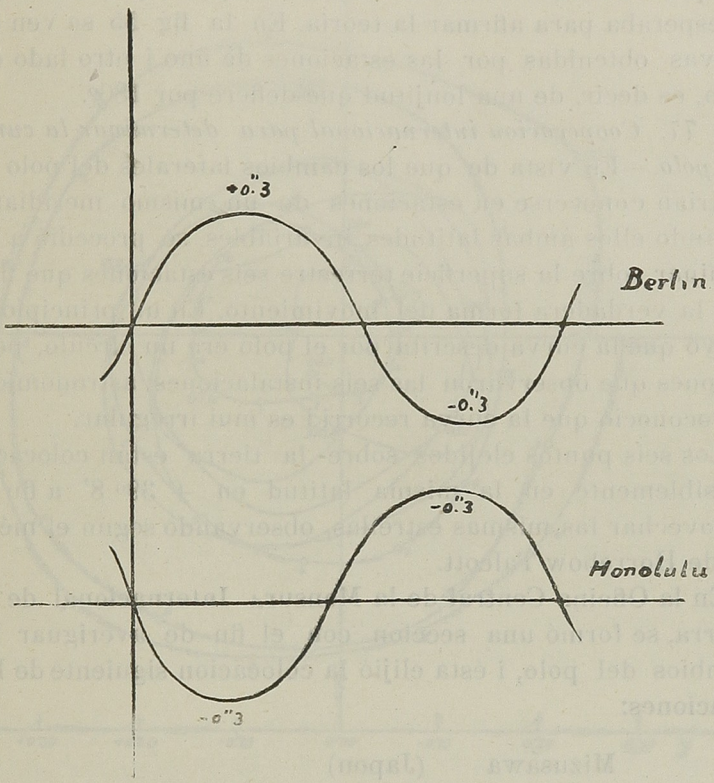

Fig. 55

especialmente dos astrónomos a la isla de Hawaii que se establecieron independientemente en Honolulu. La eleccion de este punto de la tierra obedeció al propósito de tener dos estaciones observadoras en un mismo meridiano de la tierra, pero a lados diferentes del polo. Entónces cada movimiento del polo que lo *acercaba* a una estacion (Berlin, Potsdam,

Prag) i por eso *aumentaba* la latitud jeográfica de ella, debia *alejar* el polo de la otra estacion (Honolulu) i *disminuir* su latitud por el mismo valor.

Los resultados fueron magníficos i por ellos se hizo una verdad científica el movimiento del polo; la estacion de Honolulu obtuvo, para el cambio, valores de la misma amplitud pero de signo contrario a las Europeas, que era lo que se esperaba para afirmar la teoría. En la fig. 55 se ven las curvas obtenidas por las estaciones de uno i otro lado del polo, es decir, de una lonjitud que defiere por 180°.

§ 77. *Cooperacion internacional para determinar la curva del polo.*—En vista de que los cambios laterales del polo no podrian conocerse en estaciones de un mismo meridiano, dejando ellos ámbas latitudes invariables, se procedió a diseminar sobre la superficie terrestre seis estaciones que fijaran la verdadera forma del movimiento. En un principio se creyó que la curva descrita por el polo era un círculo, pero despues que observaron las seis instalaciones astronómicas se reconoció que la curva recorrid es mui irregular.

Los seis puntos elejidos sobre la tierra están colocados sensiblemente en la misma latitud en + 39° 8' a fin de aprovechar las mismas estrellas, observando segun el método de Horrebow Talcott.

En la Oficina Central de la Mensura Internacional de la Tierra, se formó una seccion con el fin de averiguar los cambios del polo, i ésta elijió la colocacion siguiente de las estaciones:

Mizusawa	(Japon)
Tschardjui	(Turkestan)
Carloforte	(Cerdeña)
Gaithersburg	(E. U. orientales)
Cincinnati	(E. U. centrales)
Ukiah	(California)

A escepcion de Cincinnati todas las estaciones han sido creadas para este objeto.

Las estaciones empezaron a funcionar en 1899.

Los resultados del conjunto de estaciones de latitud son recojidos en la Oficina Central de Potsdam, la cual se encarga de publicarlos.

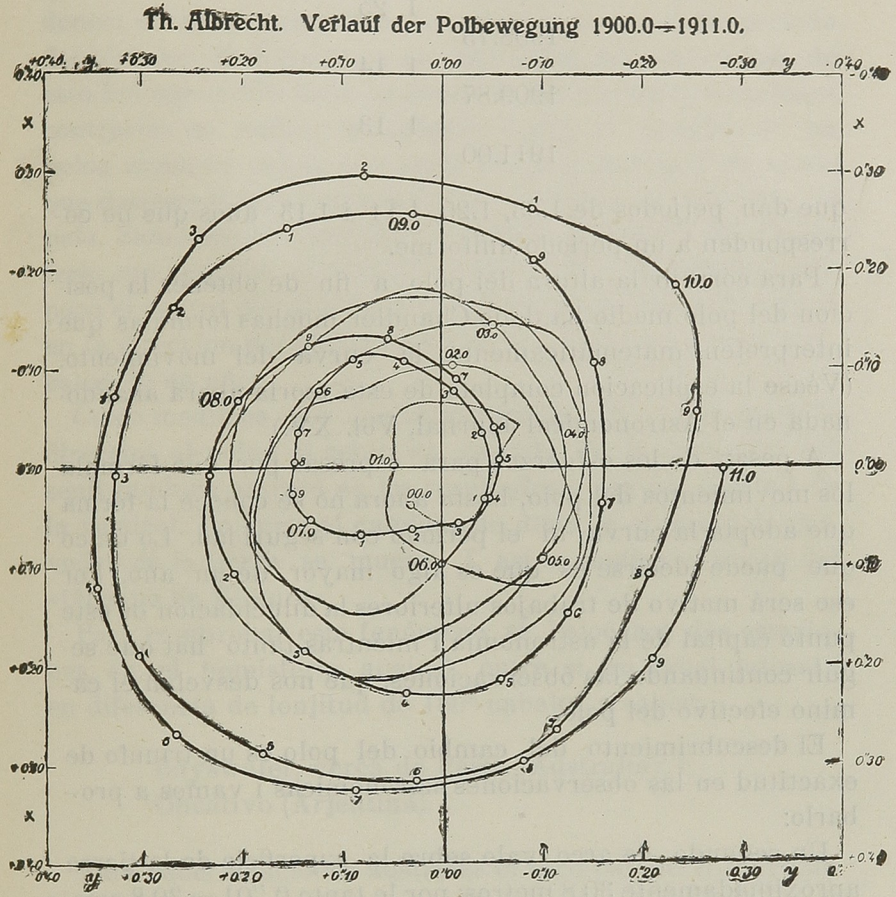

Fig. 56.

La fotografía adjunta (fig. 56) tomada de las Astr. Nachr. N.º 4504, muestra la curva del polo desde el año 1900 hasta el año 1911.

Por él se vé que el período no es uniforme, tenemos pasajes del polo momentáneo por el meridiano que une Greenwich con el polo medio en:

BIBLIOTECA NACIONAL
SECCION CHILENA

1906 15.
1.ª33
1907.48
1. 25
1908.73
1. 14
1909.87
1. 13
1911.00

que dán períodos de 1.33, 1.25, 1.14 i 1.13 años que no corresponden a un período uniforme.

Para correjir la altura del polo a fin de obtener la posicion del polo medio ha dado Chandler muchas fórmulas que interpreten matemáticamente la curva del movimiento. (Véase la esplicacion completa de esta teoría ahora abandonada en el Astronomical Journal, Vol. XV.)

A pesar de los esfuerzos para espresar por una fórmula los movimientos del polo, hasta ahora no se conoce la forma que adopta la curva ni el período con seguridad. Lo único que puede decirse es que es algo mayor de un año. Por eso será motivo de trabajos ulteriores la dilucidacion de este punto capital de la astronomia i miéntras tanto hai que seguir continuando las observaciones, que nos desvelan el camino efectivo del polo.

El descubrimiento del cambio del polo es un triunfo de exactitud en las observaciones astronómicas i vamos a probarlo:

Un segundo de arco vale sobre la superficie de la tierra aproximadamente 30.8 metros; por lo tanto 0."01 = 30.8 cms. Ahora bien, la curva del polo cabe perfectamente dentro de un cuadrado de 0."8 por lado, o espresado en metros, de 25 mts. por lado. De manera que un movimiento del polo de centímetros sobre la enorme superficie de la tierra solamente se constata con los excelentes instrumentos de que dispone la moderna ciencia de Urania.

§ 78. *Término de Kimura.*—No es esto solo, un descubrimiento orijinó otro: el desplazamiento del centro de la tie-

rra, descubierto por el japones Kimura. Este astrónomo observó que independiente del cambio del eje terrestre existia una constante que afectaba los resultados; esta constante que vale 0."04, llamado el *término de Kimura*, puso en evidencia el descentramiento del globo terráqueo. El período del término de Kimura es un año cabal. La esplicacion de este fenómeno fué fácil: la tierra en un año sufre estaciones contrarias en ámbos hemisferios; luego el deshielo de los polos acumula hácia elecuador mayor cantidad de aguas que despues pasa al otro lado para conjelarse sobre el otro polo. Esto hace cambiar temporalmente el peso de un hemisferio con respecto al otro, i naturalmente, por eso varia un poco el centro de gravedad del planeta, que se mueve pues en la direccion del eje terrestre arriba i abajo en el período cabal de un año.

Como medimos por las observaciones el ángulo entre la direccion al polo i al zenit, un cambio de la posicion del zenit tambien entrará en los resultados o sea un cambio de la vertical. La vertical cambia, sin duda, si el punto de gravedad de la tierra se mueve. I así se esplica el oríjen del «término de Kimura».

Para comprobar este fenómeno se colocaron dos estaciones en el hemisferio austral, entre sí en igual latitud i en diferencia de lonjitud de 180° cabales, a saber:

Bayswater, cerca de Perth (Australia); i
Oncativo (Arjentina).

Para estas estaciones australes el término de Kimura debia tener el mismo signo que en las estaciones boreales, si provenia de un movimiento del punto de gravedad de la tierra.

Ha sido bastante confirmada la teoría por las observaciones del hemisferio sur, pero se ha mostrado la necesidad de continuar las observaciones para asegurar mas los resultados.

Cesó de funcionar la estacion de Bayswater i fué reemplazada despues por la estacion de Johannesburg (Trans-

vaal) en Sud-Africa, donde el director activísimo señor Innes empezó las observaciones en 1910.

Poco a poco tambien fué abandonada la estacion de Oncativo i el observatorio de Espejo debe prepararse de sustituirla, porque es importantísimo seguir supervijilando el término de Kimura en ámbos lados del ecuador.

Ahora que se conoce con certeza que la latitud jeográfica varia, es del todo indispensable tener al polo bajo observacion continua, diaria puede decirse, hasta que podamos ver cuáles son las leyes del cambio de la latitud. Por lo pronto, al reducir nuestras observaciones, consideraremos una latitud media ϕ_0, i las observaciones nos darán la latitud momentánea ϕ, de modo que:

$$\phi - \phi_0 = \triangle \phi$$

será la variacion diurna de la latitud.

§ 79. *¿Hay variacion secular de la situacion del polo?.*— Algunos astrónomos suponen que el polo tiene un movimiento secular distinto de los ya averiguados; por ejemplo, si la latitud de Espejo es — 33° 33' 52" el movimiento secular variaria ϕ en un sentido:

— 33° 33' 50"
45"
40"
. . .
. . .
0° 0' 0"

hasta reducir a cero la latitud i pasar al otro lado del ecuador.

Los jeólogos suponen que tal movimiento se verifica en lapsos de tiempo que se cuentan por millones de años.

Las anteriores hipótesis no se han comprobado, a lo ménos las observaciones exactas de estrellas que datan solo del año 1750, de los tiempos de Bradley, no han indicado ni lo mínimo de un cambio secular de latitud.

Lo cierto es que hai movimientos periódicos que fluctuan entre 0."60, cuyas causas sospechamos no mas; nuestro deber es contribuir a aclararlas.

§ 80. *Indicaciones detalladas para efectuar las observaciones de latitud.*—Nuestro anteojo de pasos construido por Bamberg servirá casi esclusivamente para la determinacion diurna de la latitud, i demas está decir que deberemos garantir pocos centésimos del segundo en el conjunto de observaciones de un grupo de estrellas.

Los trabajos preliminares de las observaciones son la confeccion del programa de estrellas para todo el año.

Las declinaciones elejidas para el programa deberán tener la mayor exactitud, porque sus errores habrán de afectar los valores de ϕ.

Por esto, una vez elejidas las estrellas de los grupos, primero se las revisa en un anteojo ecuatorial del mas grande poder disponible para ver si hai entre ellas estrellas dobles. Tales estrellas hai que escluir porque es sabido que la puntería de una estrella por el hilo está influida si se encuentra otro punto luminoso cerca. Tambien podria suceder que dos compañeros estrechos de una estrella doble se confundiesen en un solo punto para el pequeño aumento de instrumento de pasos i que segun la trasparencia del aire el compañero menor atribuyera con una cantidad mayor o menor a la luz comun con la consecuencia que cambiara irregularmente el punto de gravedad de la luz que se apunta.

Naturalmente escluyendo una estrella por haberla encontrado doble, hai que escluir toda la pareja i algunas veces despues otras parejas mas porque es menester que las nuevas parejas que reemplazan las eliminadas den una suma total de $\frac{\delta_n + \delta_s}{2} - \phi$ pequeña junta con las parejas que quedan.

Una vez aseguradas todas las parejas de un grupo se manda las posiciones de las estrellas reducidas aproximadamente a 1875 al «Bureau der Geschichte des Fixsternhimmels, Kgl. Preussische Academie der Wissenschaften, Ber-

lin». En esta oficina se han recojido todas las posiciones que existen de cualquier estrella, en cualquier catálogo hasta 1900 i pagando los gastos de copia, insignificantes, uno puede obtener todo el material existente de posiciones de una estrella.

Las singulares posiciones despues se reducen a un sistema homojéneo sea con las tablas de Auwers (Ergänzungshefte zu den Astronomischen Nachrichten, N.º 7) o las de Newcomb (Catalogue of Fundamental Stars for the epochs 1875 and 1900, reduced to an absolute system prepared by ..... Simon Newcomb, Astronomical Papers, prepared for the use of the American Ephemeris, vol. VIII part. 2) o las de Boss (Weights and Systematic Corrections of Meridian Observations in Right Ascension and Declination, Astronomical Journal N.º 549-550).

En seguida se las reduce al mismo equinoccio con la precesion i determina si hai movimiento propio dando a cada posicion su peso correspondiente. Para esto hai las tablas que Auwers publicó en A. N. 3615-16 i las que dió Boss.

El promedio de las posiciones tomado con los pesos vale para el promedio de las épocas i si hai movimiento propio se aplica el valor de él multiplicado por la diferencia del equinoccio i de la época promedia para tener la posicion tambien valida para la época del equinoccio. De éste se trasporta la posicion despues por precesion (i movimiento) a cualquier otro equinoccio para que la necesitamos.

A pesar de todo cuidado, que aquí podemos aplicar quedará cierto error en la posicion definitiva que obtenemos, i una pareja de estrellas tendrá en su $\frac{\delta_n + \delta_s}{2}$ el promedio de los singulares errores de ámbas estrellas.

A pesar de estos errores de coordenadas, si año por año observamos las mismas estrellas, los resultados de la marcha del polo saldrán perfectamente, porque tendrán en sí un error constante que es el promedio de todos los errores de las parejas i que no importa para el fin de encontrar la forma del *movimiento*.

Tambien podemos hallar aproximadamente el error constante de $\frac{\delta_n + \delta_s}{2}$.

Sean, por ejemplo:

$\frac{\triangle \delta_n + \triangle \delta_s}{2}$ de la primera pareja de un grupo $= \epsilon_1$,

$\frac{\triangle \delta_n + \triangle \delta_s}{2}$ de la segunda pareja de un grupo $= \epsilon_2$,

. . . . . .

$\frac{\triangle \delta_n + \triangle \delta_s}{2}$ de la novena pareja de un grupo $= \epsilon_9$.

Si suponemos ahora que para el conjunto de los errores de los promedios de declinaciones para las 9 parejas:

$$\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \ldots + \epsilon_9}{9} = 0 \qquad (443)$$

será fácil encontrar los valores de ϵ_1 , ϵ_2 .... ϵ_9 que serán las reducciones de ϕ proporcionadas por cada pareja al promedio del grupo. Así podremos correjir los promedios en declinacion de cada pareja. Naturalmente queda ahora en todos los promedios así hechos homojéneos, un error comun a todo el grupo.

Formémonos una idea, ahora, sobre las ascensiones rectas de las parejas. Del ejemplo, de nuestro grupo 2 ya citado en páj. 264-6 vemos que el intervalo de tiempo entre una estrella i la otra de la misma pareja nunca es menor que $4^m.5$ próximamente, tiempo necesario para leer el nivel por segunda vez, anotar, invertir el anteojo i hacer entrar i descansar nuevamente los niveles, leerlos i apuntar la lectura. Segun mi propia esperiencia es perjudicial para buenas observaciones la eleccion de parejas cuya diferencia entre sus componentes no alcanza a $4^m.5$ minutos de tiempo. Entre as parejas debe haber tambien un intervalo de mas de

cinco minutos, para preparar con calma la próxima observacion. Estender demasiado el tiempo entre las parejas o entre las estrellas de una pareja es tampoco ventajoso por movimientos del anteojo íntegro o dentro del sistema del anteojo, que pueden suceder.

Para seleccionar las parejas adecuadas es útil el Catálogo Jeneral Preliminario de Lewis Boss, que contiene todas las estrellas visibles a simple vista i algunas mas de movimiento propio conocido, i que vale para el equinoccio de 1900 i para el hemisferio austral especialmente el Catálogo Jeneral de Gould para 1875 que contiene todas las estrellas de Lacaille que van hasta la sétima i media magnitud. No elijiremos estrellas mas débiles que la sétima i media magnitud, i procuraremos que las distancias zenitales sean tan pequeñas como fuere posible. Al máximum, pueden elejirse parejas de distancia zenital de 20°.

Los observatorios boreales agregaban ántes algunos *pares de refraccion*, en grandes distancias zenitales, con el objeto de estudiar si hubiera en la noche de observacion refracciones anómalas; pero fueron despues sustituidas por otras parejas mas cercanas al zenit, porque no dieron el resultado esperado.

El programa que usaremos en Espejo difiere algo del adoptado en los seis observatorios internacionales: hemos dividido las 24 horas de ascension recta en 8 grupos en vez de 12, en la forma siguiente, que se indica la distribucion de los grupos:

I	de	23h	—	1h	con su centro en	0h
II	»	2	—	4		3
III	»	5	—	7		6
IV	»	8	—	10		9
V	»	11	—	13		12
VI	»	14	—	16		15
VII	»	17	—	19		18
VIII	»	20	—	22		21

Entre cada grupo hai una hora tiempo en que no se obser-

va. Esta medida obedece al objeto de proporcionar al observador un descanso entre sus cuatro horas de trabajo, con lo cual se gana en la exactitud de las observaciones.

Con este programa conseguimos que hai dos grupos duraderos, el III i VII, pues sus ascensiones rectas centrales, en 6^h i 18^h, no son movidos por la precesion, como lo hemos espuesto en la pájina 266.

Noche a noche observamos dos grupos de estrellas empezando mas o ménos una hora despues de la puesta del sol para evitar la ajitacion de los imájenes que suele acontecer al anochecer.

Vamos a ver la razon de esto.

Si observamos el 1.er grupo, la determinacion de la latitud tendrá un error constante del conjunto de parejas.

Sea este error:

$$E_1 = \frac{\epsilon 1 + \epsilon 2 + \ldots\ldots + \epsilon 9}{9} \qquad (444)$$

El 2.º grupo dará un error sistemático:

$$E_2 = \frac{\epsilon 10 + \epsilon 11 + \ldots\ldots + \epsilon 18}{9} \qquad (445)$$

i el valor de ϕ obtenido por ámbos grupos se diferenciará en:

$$E_2 - E_1 = \epsilon_{1,2} \qquad (446)$$

que será la reduccion del segundo grupo al primero.

Para el grupo III tendremos el error E_3 i

$$E_3 - E_2 = \epsilon_{2,3} \qquad (447)$$

será la reduccion del grupo III al grupo II que se obtiene por las observaciones de ámbos grupos en la misma noche.

Ahora agregando $\epsilon_{1,2}$ se puede reducir el grupo III tambien al grupo I.

En resúmen, ligamos los grupos de manera que se puedan reducir todos sus errores sistemáticos al error del grupo I, es decir, conocemos las diferencias entre los errores constantes de los diversos grupos i el grupo I.

De esta manera se consigue una curva del movimiento polar que es contínua i paralela a la verdadera (fig. 57). No importa el error comun de todos los puntos de la curva,

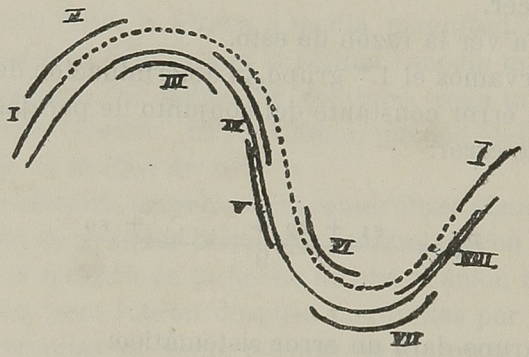

Fig. 57

pues ya sabemos que se trata solamente de estudiar su forma. Si al final del año observamos el grupo VIII en combinacion con el grupo I, i obtenemos:

$$E_1 - E_8 = \epsilon_{8,1}. \qquad (448)$$

i si ahora sumamos las diferencias:

$$\epsilon_{1,2} + \epsilon_{2,3} + \epsilon_{3,4} + \epsilon_{4,5} + \epsilon_{5,6} + \epsilon_{6,7} + \epsilon_{7,8} + \epsilon_{8,1} \equiv 0 \qquad (449)$$

el resultado debe ser idéntico cero, con lo cual se cierra la curva; al mismo tiempo se verá, si tal cosa no sucede, que hai errores sistemáticos en la reduccion de la série de deter-

minaciones, como, p. ej., un error de la constante de aberracion. Pero nos llevaria léjos, si quisiéramos esplicar, qué consecuencias posibles tuviera un error de cierro no igual a cero.

La reduccion de las observaciones es sencillísima. Primero debemos reducir las estrellas al lugar aparente i entónces se aplica la fórmula:

$$\phi = \frac{\delta n + \delta s}{2} + \frac{z_s - z_n}{2} \qquad (442)$$

$\frac{z_n - z_s}{2}$ está dado por $\frac{R_n - R_s}{2}$ a la cual aplicamos la correccion por refraccion diferencial. Ademas, correjimos la observacion por la diferencia de lecturas de los niveles.

§ 81. *Tornillo micrométrico.*—Nos ocuparemos ahora de la determinacion de una revolucion de la rosca micrométrica de que depende todo el éxito de la observacion i de los errores de la misma. En primer lugar, determinaremos las distancias de los hilos de los tres grupos verticales por medio del hilo móvil, haciéndolo coincidir con cada hilo del sistema.

Así obtenemos en vueltas i sus fracciones las distancias de los hilos f_1 , f_2 .... f_{15}.

Para el objeto que perseguimos basta solo la distancia de $f_1 - f_{15}$.

Entónces:

$$f_{15} - f_1 = (R_{15} - R_1). v \qquad (450)$$

si v es el valor de una vuelta.

Tomemos ahora la distancia de f_1 a f_{15} espresada en segundos i sus fracciones haciendo pasajes de estrellas ecuatoriales; pero es mejor agregar otros pasajes de estrellas circumpolares, que se mueven lentamente i reducirlas al ecuador multiplicando por cos δ. Tenemos entónces la distancia reducida al ecuador por la fórmula exacta:

$$\text{sen } (t_{15} - t_1) \cos \delta = \text{sen } (f_{15} - f_1) \qquad (451)$$

I la espresion de una vuelta será:

$$v'' = \frac{15\ (f_{15} - f_1)}{R_{15} - R_1} \qquad (452)$$

Otro método para conocer el valor de una revolucion del tornillo es la siguiente: orientamos el hilo móvil segun el movimiento de las estrellas, es decir, jiramos 90° el hilo móvil, i en seguida hacemos punterías a dos estrellas de declinacion mui exactamente conocida, i que pasan por el

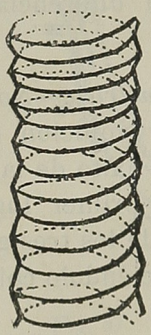

Fig. 58

campo una poco despues de la otra; de este modo encontramos la diferencia $(R_a - R_b)$. v'' que es igual a $\delta_a - \delta_b$, si correjimos por refraccion.

Los Pléyades sirven mui bien para este objeto.

§ 82. *Errores progresivos.*—En cuanto a los defectos de la rosca micrométrica, pueden ocasionar errores de dos clases: sistemáticos o progresivos i periódicos.

Los primeros se producen por variacion progresiva del paso de la espira (fig. 58). Los errores periódicos son causados por defectos de la espira, que se repiten igualmente a cada vuelta.

Nos ocuparemos primero de la determinacion de errores progresivos.

Medimos la distancia de dos hilos de un anteojo colimador, que quedará espresada en revoluciones del micrómetro del anteojo de pasos; en seguida desplazamos los hilos medidos, p. ej., moviendo algo en azimut la placa que lleva los hilos del colimador, el colimador por una cantidad constante hácia el mismo sentido i tomamos la distancia en cada nueva posicion. Por ejemplo, si la distancia medida es de mas o ménos 10 revoluciones, tendremos la distancia de 0^R — 10^R i moviendo los dos hilos por diez vueltas, mediremos por la segunda vez de 10^R — 20^R i por tercera vez de 20^R — 30^R.

Supongamos que la rosca solo tenga 30 divisiones principales, es decir, vueltas enteras, i sean los errores de las revoluciones r_0, r_1 ..... r_{30}. Admitamos que:

$$r_0 = 0 \text{ i } r_{30} = 0 \qquad (453)$$

Observamos la distancia $10^R + x$ de los hilos que sirven de mira i obtenemos:

$$x = m_{0,10} + r_{10} - r_0 \qquad (454)$$

si $m_{0,10}$ es la diferencia medida en la primera observacion — 10 vueltas.

Ahora medimos x empezando con la vuelta 10 i se tiene:

$$x = m_{10,20} + r_{20} - r_{10} \qquad (455)$$

si $m_{10,20}$ es esta vez el exceso de la mensura sobre 10 vueltas enteras.

Nuevamente medimos comenzando con la revolucion 20, i resulta:

$$x = m_{20,30} + r_{30} - r_{20} \qquad (456)$$

Sumando las tres ecuaciones, tenemos:

$$3\,x = m_{0,10} + m_{10,20} + m_{20,30} \qquad (457)$$

Una vez conocido x, la primera observacion nos facilita r_{10}, la tercera r_{20} i la segunda ecuacion sirve como comprobante.

Es ventajoso arreglar estas observaciones en tal forma que tomamos cada vez el promedio de cinco observaciones, que distan entre sí de 0.2, así se mide

de	— 0.^{R}4	hasta	9.^{R}6
de	— 0. 2	»	9. 8
de	0. 0	»	10. 0
de	+ 0. 2	»	10. 2
de	+ 0. 4	»	10. 4

i se consigue la eliminacion de los errores periódicos sobre el resultado, en vista de que hemos distribuido las medidas igualmente por una vuelta (véase la fórmula para los errores periódicos).

Una vez conocidos por un gran número de observaciones los errores progresivos:

$$r_{10} \text{ i } r_{20}$$

se forma en el colimador por un hilo fijo i un hilo móvil una distancia mas o ménos igual a cinco vueltas i se mide esta distancia empezando a 0^R i terminando a 5^R despues empezando a 5^R i terminando a 10^R i si $5^R + x$ es el valor desconocido de la distancia medida entónces existen las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x &= m_{0,5} + r_5 \\ x &= m_{5,10} + r_{10} - r_5 \end{aligned}\right\} \qquad (458)$$

pero como r_{10} ya es conocido, la sumacion de las ecuaciones nos da x, i por su sustraccion se calcula fácilmente r_5.

En una manera semejante se determina r_{15} i r_{25}.

Se podria pensar de encontrar r_1, r_2, r_3 .... construyendo una distancia artificial de una vuelta i seguir el proceso de dividir en partes iguales, que ya hemos conocido en la determinacion de errores de trazos de un círculo (§ 40). Pero en vista de que los errores progresivos deben seguir cierta lei, basta representar los valores obtenidos por un gráfico i pasar por ellos una curva tan sencilla que se puede i sacar de la curva una tabla que facilite las correcciones para cada revolucion entera.

§ 83. *Errores periódicos.*—Un error periódico de un tornillo espresa, que moviendo el hilo por cierta fraccion de una vuelta entera, el tambor no indica la misma fraccion sino otra un poco diferente. Haciendo una vuelta entera del tornillo, el tambor hace una jiracion de 360° i parece adecuado de espresar partes de vuelta por el ángulo por que jira el tambor. Suponiendo cierta regularidad de los errores periódicos, la correccion que debe recibir una lectura de $\frac{n}{1000}$ partes, será una funcion del ángulo n, que es $= \frac{360^{\circ}.\ n}{1000}$ i esta correccion puede imajinarse bajo la forma de una série de Fourier, como sigue:

$$\text{corr. } n = a_1 \cos n + b_1 \operatorname{sen} n + a_2 \cos 2\,n + b_2 \operatorname{sen} 2\,n + \ldots . \tag{459}$$

los términos dependientes del tríplice del ángulo n suponemos insignificantes.

La idea del error periódico incluye que a_1, b_1, a_2, b_2 serán iguales para diferentes vueltas del tambor, sea por toda la estension del tornillo o a lo ménos por muchas vueltas consecutivas, despues cambiándose paulatinamente.

Otra vez nos construimos en el colimador una distancia como marca, pero esta vez no múltiplos sino fracciones de

una vuelta, p. ej., la mitad. La medimos empezando primero a .00 de una vuelta, de manera que el fin de la marca en el colimador coincidirá con .50.

La segunda mensura irá de .10 hasta .60
La tercera » » » .20 » .70
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
La décima i última » » .90 » .40

Sea f el valor exacto de la estension de la marca, u i u' las lecturas al principio i al fin de cada mensura, entónces será:

$$f = u' - u + a_1 (\cos u' - \cos u) + b_1 (\operatorname{sen} u' - \operatorname{sen} u) + a_2 (\cos 2u' - \cos 2u) + b_2 (\operatorname{sen} 2u' - \operatorname{sen} 2u) \quad (460)$$

o

$$f = u' - u - 2a_1 \operatorname{sen}\frac{u'-u}{2}\operatorname{sen}\frac{u'+u}{2} + 2b_1 \operatorname{sen}\frac{u'-u}{2}\cos\frac{u'+u}{2} - 2a_2 \operatorname{sen}(u'-u)\operatorname{sen}(u'+u) + 2b_2 \operatorname{sen}(u'-u)\cos(u'+u) \quad (461)$$

En vista que para las diez observaciones los sen $\frac{u'+u}{2}$, cos $\frac{u'+u}{2}$, sen $(u'+u)$, cos $(u'+u)$ marchan con iguales distancias de 36°, 36°, 72°, 72° una vez (resp. dos veces) por toda la circunferencia, miéntras sus factores son casi idénticos, se puede suponer $f = \frac{\Sigma (u'-u)}{10}$ i cuando f es conocido se formarán para las diferencias $u' - u - f$ las siguientes ecuaciones:

$$u' - u - f = 2a_1 \operatorname{sen}\frac{f}{2}\operatorname{sen}\left(u + \frac{f}{2}\right) - 2b_1 \operatorname{sen}\frac{f}{2}\cos\left(u + \frac{f}{2}\right) + 2a_2 \operatorname{sen} f \operatorname{sen}(2u + f) - 2b_2 \operatorname{sen} f \cos(2u + f) \quad (462)$$

Hai de tal manera diez ecuaciones con las cuatro desconocidas:

$\left(2\,a_1 \operatorname{sen} \frac{f}{2}\right)$, $\left(2\,b_1 \operatorname{sen} \frac{f}{2}\right)$, $(2\,a_2 \operatorname{sen} f)$, $(2\,b_2 \operatorname{sen} f)$. Las nombramos: x y z w

i pongamos la cantidad dada $u' - u - f = n$.

Resultan, pues, 10 ecuaciones:

$$x \operatorname{sen}\left(u+\frac{f}{2}\right) - y \cos\left(u+\frac{f}{2}\right) + z \operatorname{sen}(2u+f) - w\cos(2u+f) = n \tag{463}$$

Hojeando en las prescripciones sobre el método de los cuadrados mínimos (§ 38) veremos que obtenemos la primera ecuacion normal:

$$\left.\begin{aligned} & x.\ \Sigma \operatorname{sen}^2\left(u+\frac{f}{2}\right) - \frac{y}{2}\Sigma \operatorname{sen}(2u+f) \\ & + z\,\Sigma \operatorname{sen}\left(u+\frac{f}{2}\right)\operatorname{sen}(2u+f) \\ & - w\,\Sigma \operatorname{sen}\left(u+\frac{f}{2}\right)\cos(2u+f) = \Sigma\, n \operatorname{sen}\left(u+\frac{f}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{464}$$

El factor de x es la suma de 10 cuadrados de senos de ángulos equidistantes, que distan uno del otro de 36°. Esta suma es por leyes de la goniometria igual a 5. El factor de y desaparece. Es la suma de senos de ángulos equidistantes que hacen juntos dos vueltas del círculo entero. Lo mismo sucede con los factores de z i w pues dejan trasformarse en:

$$-\frac{1}{2}\left[\cos\left(3u+3\frac{f}{2}\right) - \cos\left(u+\frac{f}{2}\right)\right]$$

i

$$-\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(3u+3\frac{f}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(u+\frac{f}{2}\right)\right]$$

respectivamente, donde ámbas sumandas cumplen respectivamente con la misma condicion de ser senos o cosenos de ángulos igualmente distribuidos por enteras circunferencias delcírculo. Sobra, pues, únicamente:

$$5\,x = \Sigma\, n.\ \text{sen}\left(u + \frac{f}{2}\right) \qquad (465)$$

Igualmente darán las otras ecuaciones normales las formas:

$$\left.\begin{aligned} 5\,y &= -\Sigma\, n\,\cos\left(u + \frac{f}{2}\right) \\ 5\,z &= \Sigma\, n\,\text{sen}\,(2\,u + f) \\ 5\,w &= -\Sigma\, n\,\cos\,(2\,u + f) \end{aligned}\right\} \qquad (466)$$

De los valores x, y, z, w se desprenden en esta série de observaciones únicamente bien los coeficientes a_1 i b_1 en vista que f igual mas o ménos a media vuelta o sea 180°, es pues:

$$\text{sen}\,\frac{f}{2} = 1,\ \text{sen}\,f = 0,$$

i

$$a_2 = \frac{z}{2\ \text{sen}\,f} \qquad b_2 = \frac{w}{2\ \text{sen}\,f} \qquad (467)$$

tienen denominadores tan pequeños que el valor sale inciertísimo.

Hai que hacer otra série de observaciones donde f es igual a otra fraccion de una vuelta entera. Con igual peso se determinan los coeficientes a_1, b_1 i a_2, b_2, si $f = 1/3$ vuelta $= 120°$.

Entónces, 2 sen $^1/_2 f = 1.732$ i 2 sen f tiene el mismo valor.

Si hai bastante observaciones que determinan los cuatro constantes a_1, b_1, a_2, b_2, se puede calcular para cada fraccion de vuelta $\frac{n}{1000}$, o determinando el ángulo $u = \frac{360 . n^o}{1000}$

$$\text{corr. } n = a_1 \cos u + b_1 \text{ sen } u + a_2 \cos 2u + b_2 \text{ sen } 2u \qquad (468)$$

i tambien construirse una tabla que permita luego sacar el valor de corr. n, entrando con el valor de n.

En los últimos decenios la construccion de tornillos ha hecho tales progresos, que se puede exijir de un buen tornillo, que no tenga errores periódicos.

Haremos, pues, la averiguacion si hai errores periódicos para mostrarnos como observadores concienzudos, pero esperamos de antemano el resultado que resulten $a_1, b_1, a_2, b_2 \neq 0$ o igual a insignificancias que no se toman en cuenta.

Hai otra razon mas que nos permite despreciar los errores periódicos. La observacion de la latitud de una noche es el resultado de dos grupos de nueve parejas cada uno o en su total 36 estrellas.

Es algo probable, que los 36 valores de u, que se emplean en estas 36 estrellas, sean distribuidas mas o ménos uniforme por el círculo entero, i que por esto la correccion debida a errores periódicos sea destruida tomando el promedio de los diferentes valores de las 36 estrellas.

No es necesario, pues, aplicar tal correccion a cada mensura si fuese apreciable; pero es de suponer, que sea completamente despreciable.

BIBLIOTECA NACIONAL
SECCION CHILENA

BIBLIOTECA NACIONAL
14 FEB. 1962
Secc. Control y Cat.

ÍNDICE

I. EL INSTRUMENTO DE PASAJES

Párrafo		Pájina
1.	Introduccion	3
2.	Correccion del reloj	
3.	Error de colimacion	7
4.	Error de inclinacion	9
5.	Error de azimut	10
6.	Fórmula final	12
7.	Fórmula de Bessel	13
8.	Nociones jenerales	14
9.	Influencia de la refraccion en las observaciones de pasajes	19
10.	Influencia de la paralaje en las observaciones meridianas	23
11.	Nociones jenerales de la paralaje	25
12.	Latitud jeográfica i jeocéntrica	28
13.	Tarea de deducir la latitud jeocéntrica de la jeográfica	32
14.	Tarea de determinar el radio vector de un punto de la superficie	34

Párrafo — Pájina

15. Determinacion de $\phi' - \phi$ 37
16. Série auxiliar $y - x$ para la espresion tg $y = n$ tg x.. 37
17. Aplicacion de la fórmula del párrafo 16 para determinar $\phi' - \phi$ 47
18. Cálculo numérico de los coeficientes 49
19. Ejemplo para calcular la diferencia de la latitud jeocéntrica ménos la jeográfica 51
20. Cálculo de $\log \rho - \log a$ 52
21. Série auxiliar para reemplazar $\log \sqrt{1 - 2a\cos x + a^2}$ 52
22. Série auxiliar para reemplazar $\log \sqrt{1 + 2a\cos \xi + a^2}$ 56
23. Aplicacion de la série del párrafo 22 para determinar $\frac{\rho}{a}$ 58
24. Cálculo numérico de los coeficientes 63
25. Aplicaciones 66
26. Tablas 67
27. Coordenadas de un punto cualquiera de la superficie terrestre con relacion a un sistema fijo de coordenadas 70
28. Efecto de la paralaje en la distancia zenital 72
29. Influencia de la paralaje en la ascension recta i declinacion aparentes 77
30. Cálculo de $\alpha' - \alpha$ 81
31. Cálculo de $\delta' - \delta$ 87
32. Cálculo de α i δ jeocéntricas 94
33. Paralaje en las observaciones meridianas 96
34. Aplicacion a una observacion meridiana del cometa Morehouse 104

II. EL CIRCULO VERTICAL

35. Lectura de los círculos 114
36. El run 120
37. Error de escentricidad 125
38. Aplicacion del método de los cuadrados mínimos.. 133

Párrafo		Pájina
39.	Errores sistemáticos de trazos	141
40.	Errores accidentales de trazos	143
41.	Flexion	152
42.	Manera de hacer las punterias	153
43.	Curvatura del paralelo	154
44.	Correccion por falta de orientacion	158
45.	Nociones jenerales de la refraccion	165
46.	Temperatura absoluta	166
47.	Presion i densidad del aire	168
48.	Valor numérico de las constantes	171
49.	Interesante caso especial que podria existir	174
50.	Disminucion de la temperatura con la altura	175
51.	Hipótesis de la disminucion de la temperatura	176
52.	Discusion de las cinco hipótesis	177
53.	Refraccion para distancias zenitales pequeñas	190
54.	Valor numérico de la constante de refraccion	196
55.	Refraccion en grandes distancias zenitales	199
56.	Construccion de tablas	205
57.	Ejemplos	209
58.	Determinacion de declinaciones relativas	211
59.	Observaciones de declinacion de los planetas o cometas	215
60.	Coordenadas absolutas	216
61.	Determinacion del polo	218
62.	Determinacion del zenit o del nadir	221
63.	Puntos norte i sur del horizonte	225
64.	Determinacion de la oblicuidad de la eclíptica	227
65.	Determinacion de ascensiones rectas absolutas	233
66.	Influjo de la marcha del reloj	237
67.	Ecuacion de brillo	240

III. INSTRUMENTO DE PASAJES ACODILLADO

68.	Determinacion de la hora por el instrumento acodillado	242
69.	Determinacion i correccion de la colimacion	246

Párrafo		Pájina
70.	Método de Doellen	250
71.	Micrómetro impersonal	251
72.	Punterías en declinacion	253
73.	Niveles Horrebow-Talcott	258
74.	Método de Horrebow-Talcott	259
75.	Observacion de grupos	263
76.	Variacion de la latitud	267
77.	Cooperacion internacional para determinar la curva del polo	270
78.	Término de Kimura	272
79.	¿Hai variacion secular de la situacion del polo?...	274
80.	Indicaciones detalladas para efectuar las observaciones de latitud	275
81.	Tornillo micrométrico	281
82.	Errores progresivos	282
83.	Errores periódicos	285